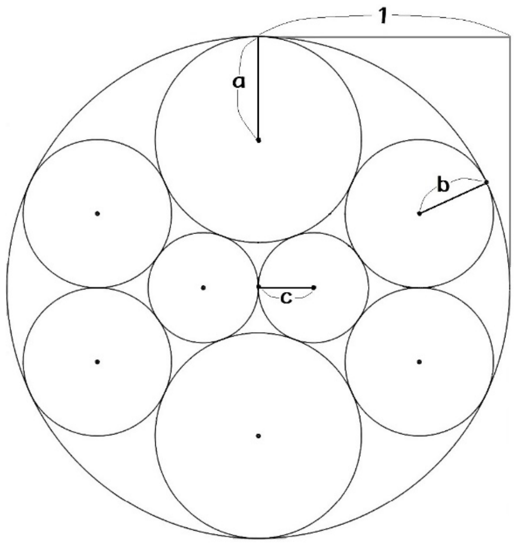
9個の円の接触問題

広幡神社（三重県）の算額から

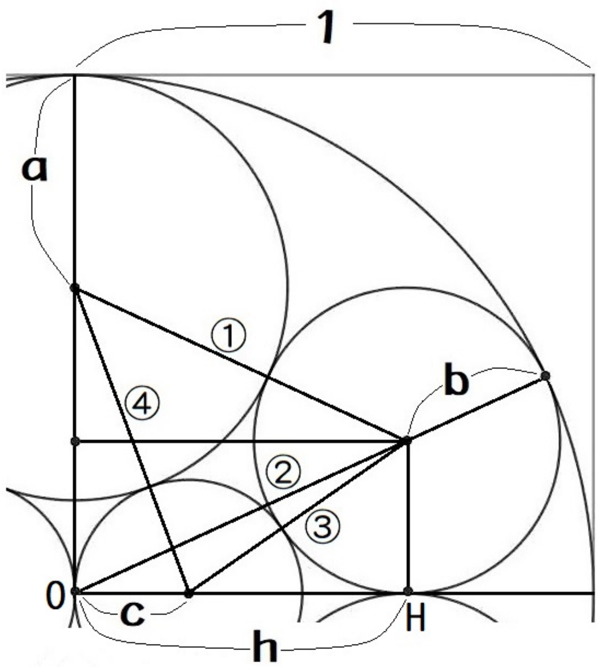


【問題】

半径１の円の中に２個の大円（半径a）と４個の中円（半径b）および２個の小円（半径c）が図の様に接している。また，この図は上下対称かつ左右対称となっている。このとき，３つの半径a,b,cを求めよ。

【解答】

図の右上四半分の図をかく。OH=hとおく。また、４つの直角三角形に対し，それらを斜辺の番号で区別し、その直角三角形において成り立つ等式も同じ番号とする。



すると，次の４つの等式を得る。

$$(a+b)^2=h^2+(1-a-b)^2 \quad \cdots ①$$

$$(1-b)^2=h^2+b^2 \quad \cdots ②$$

$$(b+c)^2=b^2+(h-c)^2 \quad \cdots ③$$

$$(a+c)^2=c^2+(1-a)^2 \quad \cdots ④$$

したがって，

$0=h^2+1-2a-2b$ ・・・①’
$1-2b=h^2$ ・・・②’
$2bc=h^2-2ch$ ・・・③’
$2ac=1-2a$ ・・・④’

となるので，①’と②’より　$a+2b=1$を得る。したがって，

$$a=h^2,\quad 2b=1-h^2$$

となり，さらに④’から　$c=\dfrac{1-2a}{2a}=\dfrac{1-2h^2}{2h^2}$　を得る。

これら，hで表されたa,b,cを③’に代入することで，

$$(1-h^2)\cdot\frac{1-2h^2}{2h^2}=h^2-2\cdot\frac{1-2h^2}{2h^2}\cdot h$$

となる。整理すると，

$$4h^3+3h^2-2h-1=0$$

$$(h+1)(4h^2-h-1)=0$$

$h>0$ であるから，

$$h=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

を得る。したがって，

$$a=h^2=\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)^2=\frac{9+\sqrt{17}}{32}$$

$$b=\frac{1-h^2}{2}=\frac{23-\sqrt{17}}{64}$$

$$c=\frac{1-2a}{2a}=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

を得る。

【文化９年(1812 年)に広幡神社に掲げられた元の問題の設定について】

この解答の様に外側の円の半径を１とするのではなく，外側の円の直径を 31.7 寸と与え，大円の直径つまり $2a$ を求めさせている。

それを具体的に計算すると，

$$2a=\frac{9+\sqrt{17}}{32}\times 31.7=13.0000(765\cdots)$$ （小数第４位までは 0 が列ぶ）

となる。つまり，31.7 寸を与え 13.0000 と計算させる設定の出題となっている。

$\sqrt{17}$ の近似値を知っているからこそ出題できる問題と思われる。

［Tea Time］

この連立方程式を Mathematica を使って解くと，１秒以内で解を得られた。

３行目の出力が、すべて正の解となっている。

```
In[ ]:= Solve[
         (a + b) ^2 == h^2 + (1 - a - b) ^2 &&
          (1 - b) ^2 == b^2 + h^2 &&
          (b + c) ^2 == b^2 + (h - c) ^2 &&
          (a + c) ^2 == c^2 + (1 - a) ^2, {a, b, c, h}]
```

$$\text{Out[ ]=}\ \left\{\left\{a\to 1,\ b\to 0,\ c\to -\tfrac{1}{2},\ h\to -1\right\},\right.$$
$$\left\{a\to \tfrac{1}{32}\left(9-\sqrt{17}\right),\ b\to \tfrac{1}{64}\left(23+\sqrt{17}\right),\ c\to \tfrac{1}{4}\left(5+\sqrt{17}\right),\ h\to \tfrac{1}{8}\left(1-\sqrt{17}\right)\right\},$$
$$\left.\left\{a\to \tfrac{1}{32}\left(9+\sqrt{17}\right),\ b\to \tfrac{1}{64}\left(23-\sqrt{17}\right),\ c\to \tfrac{1}{4}\left(5-\sqrt{17}\right),\ h\to \tfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{17}\right)\right\}\right\}$$

【参考文献】

解説・監修　深川英俊

［特別展］『庶民の算術展　世界がびっくり！絵馬に見る最強の謎解きパワー』

発行　朝日新聞社事業本部名古屋企画事業チーム　発行日　２００５年４月２９日

堀部和経　２０２１／１２／０４