

標準正規分布曲線の下での面積（高校生に向けて）

堀部 和経

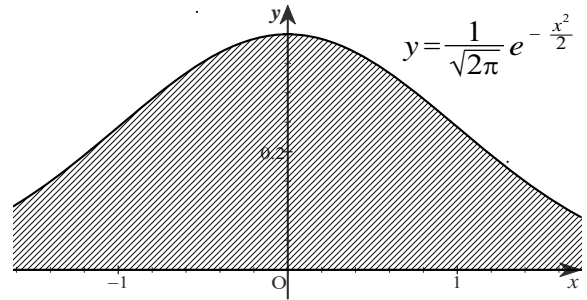
堀部数学模型研究所代表、大同大学・愛知県立春日井東高等学校・NSM&D非常勤講師

2020/11

この面積は1であることを、高校生に向けて証明する。

§ 1 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \dots \textcircled{1}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \dots \textcircled{2}$ を示す。



[証明] $x = \sqrt{2}u$ と置換すると、 $\frac{dx}{du} = \sqrt{2}$ であり、 $x: -\infty \rightarrow \infty$ のとき $u: -\infty \rightarrow \infty$ なので、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{の左辺} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} e^{-\frac{(\sqrt{2}u)^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

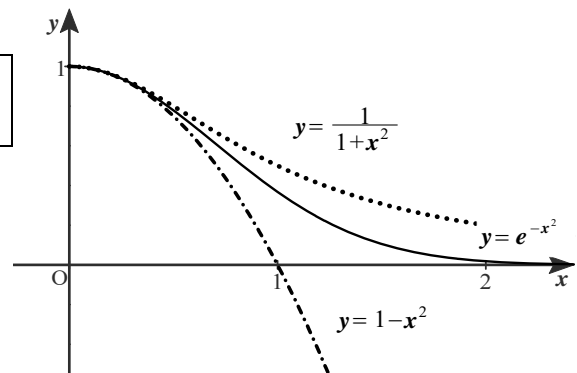
以下、 $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ とおき、順を追って $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \dots \textcircled{1}$ を証明する。

§ 2 $1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0) \dots \textcircled{3}$

[証明] $F(x) = e^{-x^2} - (1 - x^2)$ とおくと、

$F(0) = e^0 - 1 = 0$ であり、

$F'(x) = -2xe^{-x^2} + 2x = 2x(1 - e^{-x^2}) = 2x \frac{e^{x^2} - 1}{e^{x^2}} > 0$ なので、 $F(x) > 0$ となる。



次に、 $e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1+x^2 < e^{x^2}$ であるから、 $G(x) = e^{x^2} - (1+x^2)$ とおくと、

$$G(0) = e^0 - 1 = 0 \text{ であり、}$$

$$G'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1) > 0 \text{ なので、 } G(x) > 0 \text{ となる。} \quad \blacksquare$$

§ 3 ③により $\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^\infty e^{-nx^2} dx < \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} \cdots \textcircled{4}$ となっている。

ここで、 $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とおき、各辺 (左辺、右辺、中辺) の値を計算する。

(A) まず、 $x = \cos \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$ 、 $1-x^2 = \sin^2 \theta$ 、 $x: 0 \rightarrow 1$ のとき $\theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ なので、

$$\text{(左辺)} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n \theta (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta = S_{2n+1}$$

(B) 次に、 $x = \frac{1}{\tan \theta}$ とおき、 $\frac{dx}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$ 、 $\frac{1}{1+x^2} = \sin^2 \theta$ 、 $x: 0 \rightarrow \infty$ のとき $\theta: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ なので、

$$\text{(右辺)} = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n} \theta \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \theta d\theta = S_{2n-2}$$

(C) さらに、 $\sqrt{nx} = t$ とおくと、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 、 $nx^2 = t^2$ 、 $x: 0 \rightarrow \infty$ のとき $t: 0 \rightarrow \infty$ なので、

$$\text{(中辺)} = \int_0^\infty e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} I$$

これらを不等式④に代入し、 $S_{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}} I < S_{2n-2}$

したがって、

$$\boxed{\sqrt{n} S_{2n+1} < I < \sqrt{n} S_{2n-2} \cdots \textcircled{5}}$$

を得る。

§ 4 $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ に関する幾つかの等式および不等式などを計算する。

まず、 $S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, $S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ である。

$$\begin{aligned} \text{また、} S_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x dx = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n \end{aligned}$$

これを整理し、 $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ となる。

したがって、 $S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} S_{2n-1}$ および $S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} S_{2n-2}$ となる。それぞれ順次添数を下げ、

$$S_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \quad (\text{最後の因数は、} S_1 = 1)$$

$$S_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{最後の因数は、} S_0 = \frac{\pi}{2})$$

これらの積をとり、

$$S_{2n+1} S_{2n} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore n \cdot S_{2n+1}^2 = \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

さらに、両辺の正の平方根をとると、

$$\sqrt{n} S_{2n+1} = \sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}} \dots \textcircled{6}$$

となる。

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $0 < \sin x < 1$ なので、 $\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x (> 0)$ である。

$$\therefore S_{2n-1} > S_{2n} > S_{2n+1} (> 0) \quad \therefore \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} > \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} > 1$$

$$\text{ここで、(左辺)} = \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{S_{2n-1}}{\frac{2n}{2n+1} S_{2n-1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \dots \textcircled{7} \text{ となる。}$$

§ 5 最後に、 $n \rightarrow \infty$ とすると、⑦、⑥より

$$\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \rightarrow 1 \quad \therefore \quad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \rightarrow 1 \quad \therefore \quad \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \rightarrow 1$$

となるから、

$$\text{⑤の左辺} = \sqrt{n} S_{2n+1} = \sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}} \rightarrow \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

また、

$$\begin{aligned} \text{⑤の右辺} &= \sqrt{n} S_{2n-2} = \sqrt{n} S_{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1} \\ &= \sqrt{n} S_{2n+1} \cdot \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \cdot \frac{2n}{2n-1} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

したがって、不等式 ⑤ で、はさみうちの原理により、

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る。