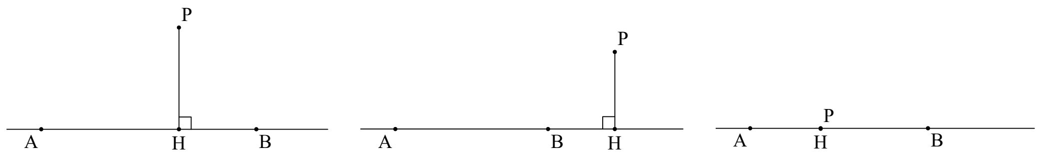
６つの線分からなる三角形について

［記法］この小論における用語について

直線 AB と点 P があり，点 P から直線 AB に下ろした垂線の足を H とするとき，簡単のため

H：［P, AB］

と略記する。さらに，点 P が直線 AB 上にあるときは，点 H は点 P とする。



［準備１］

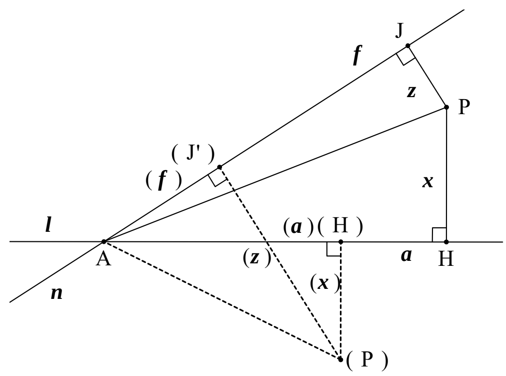
点 A を通る２直線を l, n とする。任意の点 P をとり，

H：［P, l］，　J：［P, n］

とする。AH＝a，AJ＝f，PH＝x，PJ＝z とする。

このとき直角三角形をに着目すれば次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{AP}^2 = a^2 + x^2 = f^2 + z^2$$



また，点 P の位置と無関係にこの等式は成立する。線分の両端の２点が一致したときは線分の長さを０と考える。

図は，点 P の位置を括弧の有無で２通りの場合を表してある。

［定理１］

三角形 ABC と点 P に対して，

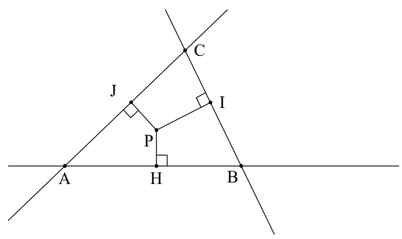
H：［P, AB］，I：［P, BC］，J：［P, CA］

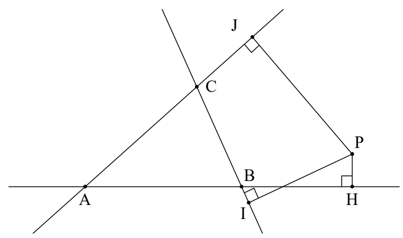
とする。AH=a , HB=b , BI=c , IC=d , CJ=e , JA=f

とおくと，

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

が成り立つ。





［証明］PH=x , PI=x , PJ=z とおく。

PA^2，PB^2，PC^2 に［準備１］を適用して，

$$\mathrm{PA}^2 = a^2 + x^2 = f^2 + z^2$$

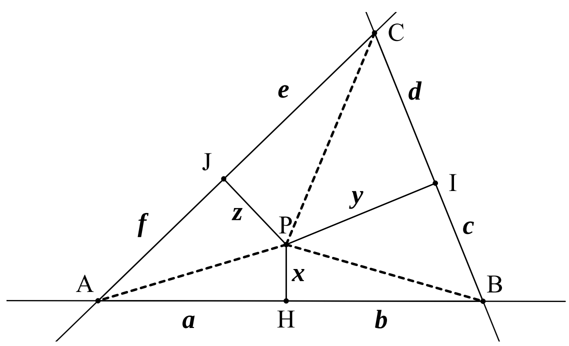
$$\mathrm{PB}^2 = c^2 + y^2 = b^2 + x^2$$

$$\mathrm{PC}^2 = e^2 + z^2 = b^2 + x^2$$

３つの等式の辺々を加えて，

$$a^2 + c^2 + e^2 = b^2 + d^2 + f^2$$

を得る。　　　　　　　　　　　　［終］



注意，図では点 P は三角形内にあるが，［準備１］により点 P の位置に無関係に成り立つ。

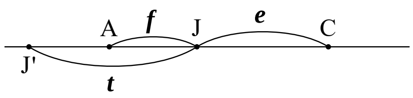
［準備２］

２点 A，C を通る直線 l 上の２点 J，J' の位置を様々に場合分けし線分 AJ'，CJ' の長さを確認する。

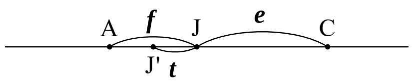
$\mathrm{AJ}=f$，$\mathrm{CJ}=e$，$\mathrm{JJ'}=t$

（場合１）点 J が線分 AC の内分点のとき，つまり $\mathrm{AC}=e+f$ のとき，

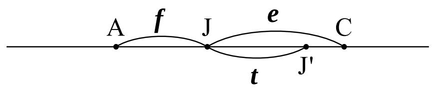
点 J' の位置を次の図のように 4 つの場合に分け，



[1-1]



[1-2]

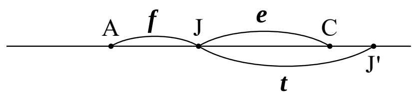


[1-3]

この 4 つの場合それぞれに

$\mathrm{AJ'}=t-f$，$=f-t$，$=f+t$，$=t+f$

$\mathrm{CJ'}=t+e$，$=e+t$，$=e-t$，$=t-e$



[1-4]

となる。ところで $\mathrm{JJ'}=t$ も線分の長さとしていたが，

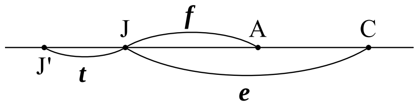
ここからは，t のみ有効線分とし負の値も許容すると，

$$\mathrm{AJ'}^2=\left(f+t\right)^2,\ \mathrm{CJ'}^2=\left(e-t\right)^2 \cdots\cdots\cdots\ (\alpha)$$

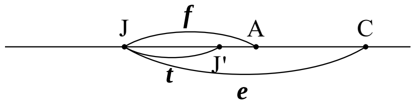
と表すことができる。

（場合２）点 J が線分 AC の外分点かつ点 A の外側のとき，つまり $\mathrm{AC}=e-f$ のとき，

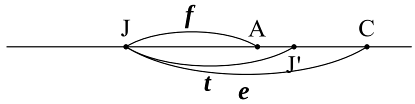
点 J' の位置を次の図のように 4 つの場合に分けると，



[2-1]



[2-2]

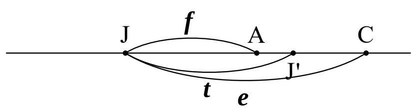


[2-3]

前の場合と同様に, この 4 つの場合それぞれに

$\mathrm{AJ'}=f+t$，$=f-t$，$=t-f$，$=t-f$

$\mathrm{CJ'}=e+t$，$=e-t$，$=e-t$，$=e-t$



[2-3]

となる。場合 1 と同様に t のみ有効線分とし負の値も許容すると，

$$\mathrm{AJ'}^2=\left(f+t\right)^2,\ \mathrm{CJ'}^2=\left(e+t\right)^2 \cdots\cdots\cdots\ (\beta)$$

となる。

さらに，点 J が線分 AC の外分点かつ点 B の外側のとき，つまり $\mathrm{AC}=f-e$ のとき，

この場合も同様に，（β）が成り立つ。

［準備２のまとめ］

点 J が線分 AC の内分点，つまり $\mathrm{AC}=e+f$ のとき，（α）となる。

点 J が線分 AC の外分点，つまり $\mathrm{AC}=\left|e-f\right|$ のとき，（β）となる。

［定理２］

三角形 ABC の３つの辺 AB,BC,CA の辺または延長上に３点 H,I,J があり，

AH=a , HB=b , BI=c , IC=d , CJ=e , JA=f

としたとき，

$$a^2+c^2+e^2=b^2+d^2+f^2 \cdots ①$$

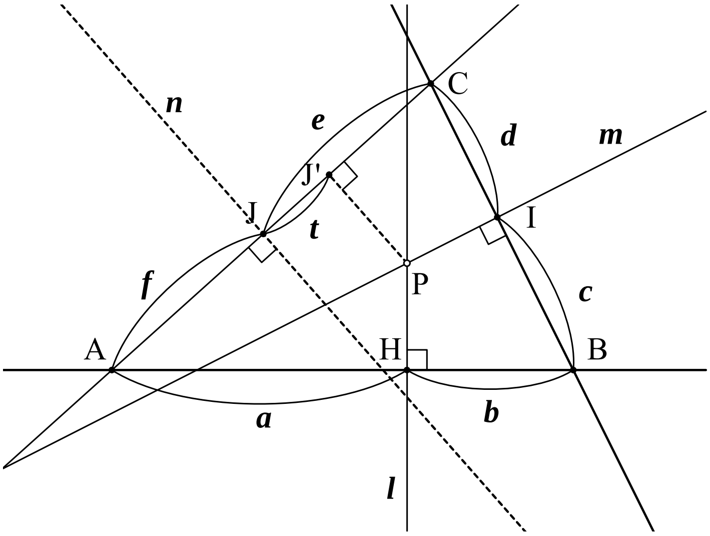
を仮定する。このとき，

直線 AB に垂直で点 H を通る直線を l

直線 BC に垂直で点 I を通る直線を m

直線 CA に垂直で点 J を通る直線を n

とすると３直線 l,m,n は１点で交わる。



［証明］

２直線 l,m の交点を P とする。

この点 P に対して，

J'：［P, CA］

JJ' ＝t （t ：有効線分）

とおく。

点 P，△ABC，垂線の足 H,I,J' に対して、定理１を適用する。

$$a^2+c^2+\mathrm{CJ'}^2=b^2+d^2+\mathrm{AJ'}^2 \cdots ②$$

となる。

（場合１）点 J が線分 AC の内分点，つまり AC＝$e+f$ のとき

$$a^2+c^2+(e-t)^2=b^2+d^2+(f+t)^2$$

$$a^2+c^2+e^2+t^2-2et=b^2+d^2+f^2+t^2+2ft$$

①であるから，

$$(e+f)t=0 \qquad \therefore\ \ \mathrm{AC}\cdot t=0 \qquad \therefore\ \ t=0$$

（場合２）点 J が線分 AC の外分点，つまり AC＝$|e-f|$ のとき

$$a^2+c^2+(e+t)^2=b^2+d^2+(f+t)^2$$

$$(e-f)t=0 \qquad \therefore\ \ \mathrm{AC}\cdot t=0 \qquad \therefore\ \ t=0$$

いずれにしろ，JJ' ＝0 であるから，２点 J，J' は一致する。

したがって３直線 l,m,n は１点 P で交わっている。［終］

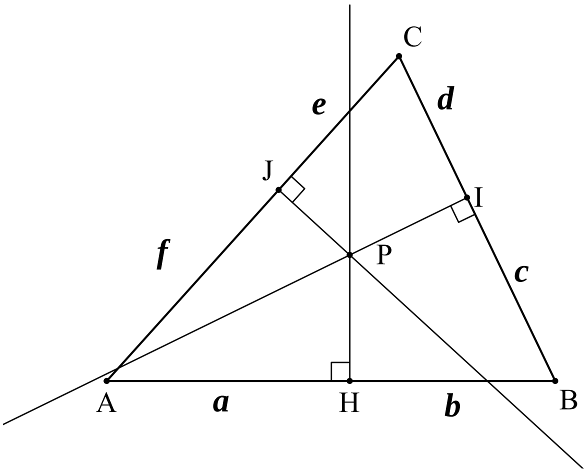
※　境界となる場合について触れていないが，どちらかに含めて話を進めて問題ない。

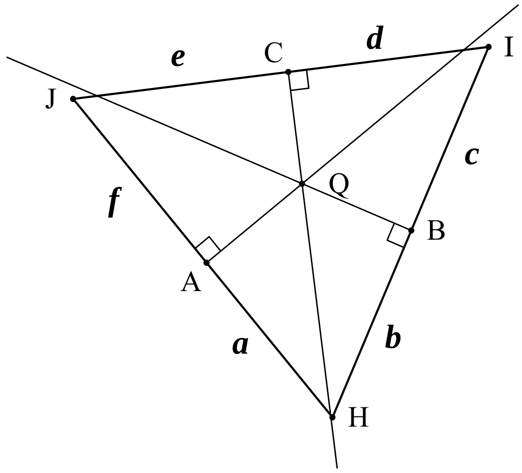
［系］

３辺の長さが $a+b,\ c+d,\ e+f$ である△ABC と３辺の長さが $b+c,\ d+e,\ f+a$ である△HIJ の存在を仮定する。

このとき，$a^2+c^2+e^2=b^2+d^2+f^2$ が成り立つことと，

次の図にある点 P の存在すること，および点 Q の存在することは同値である。



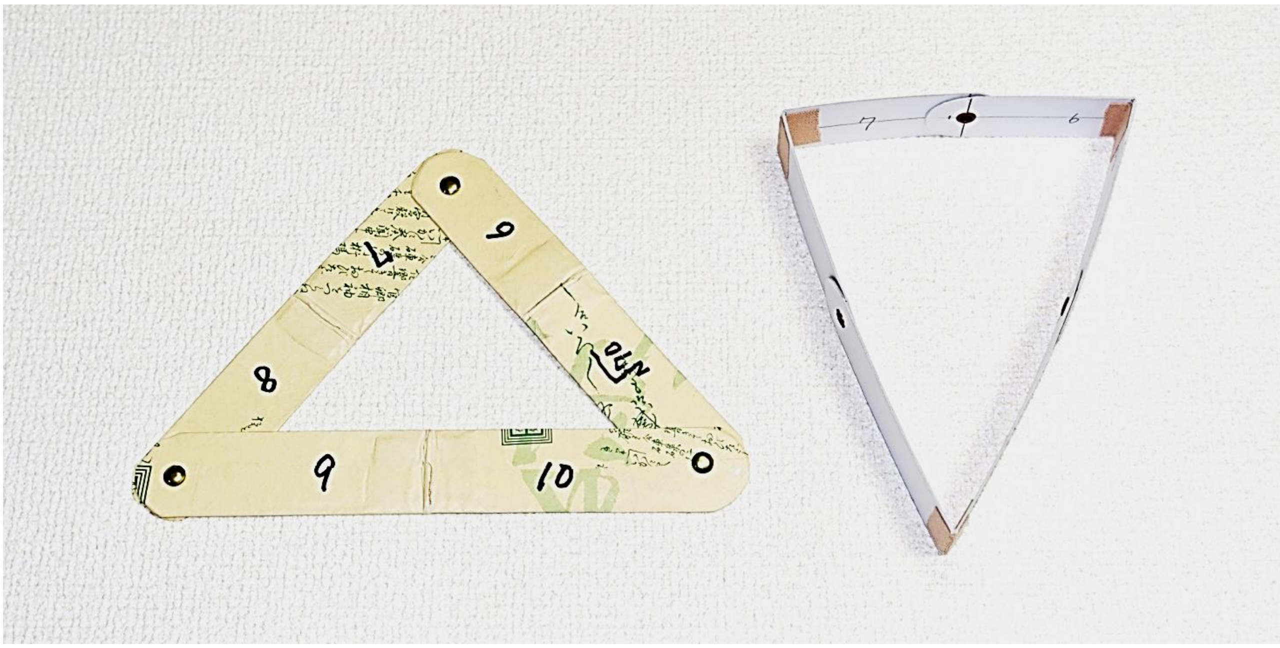


［可動模型］

６片からなる辺長の異なるカレイド・サイクル模型

６つの可動部分の長さが $6.\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \sqrt{70}$ のカレイド・サイクル

$6^2+8^2+10^2=200,\ 7^2+9^2+70=200$ となっている。



［長さは 6. 7, 8, 9, 10, 8.4 cm で作成］

堀部和経　　2019/12/14

参考　The variety of kaleidocycles, 天童智也（日本テセレーションデザイン協会）

Quasiperiodic tiling and related topics,　RIMS　2019/10/7