正方形と４円の問題　　2019

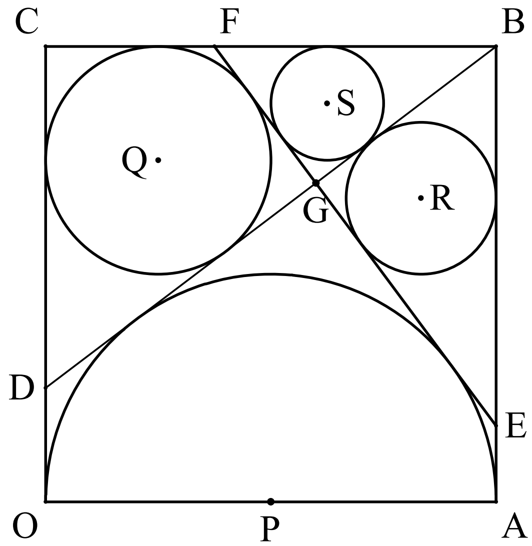
［問題１］

一辺が2の正方形 OABC がある。辺 OA の中点 P を中心とする半径1の円を考える。（半径を $p=1$ とする。図は上半円のみ記載）

このとき、点 B を通り円 P に接線を引き辺 OC との交点を D とする。直角三角形 BCD の内接円を Q とし、図の様な2円 P，Q の共通接線と辺 AB および BC との交点を E , F とする。線分 BD,FG の交点を G とする。

三角形 BEG の内接円を R とし、三角形 BFG の内接円を S とする。

このとき、3円 Q , R , S の半径 q, r, s を求めよ。



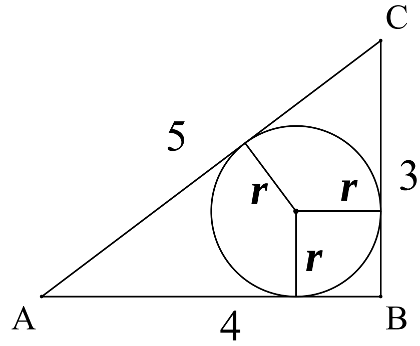
【確認事項】

３辺が3 , 4 , 5の直角三角形の内接円の半径 r は1である。

（説明）半径を r とすると、$(\mathrm{AB}-r)+(\mathrm{BC}-r)=\mathrm{CA}$

であるので，$(4-r)+(3-r)=5$ から、$r=1$ となる。

つまり、斜辺の $\dfrac{1}{5}$ が、内接円の半径である。



（解）

BA の延長上に点 H を AH＝1となるようにとる。

点 H から引いた円 P への接線と BD との交点を I とし、2直線 OC と EF との交点を J とする。

また、$\angle\mathrm{PBA}=\alpha$，$\angle\mathrm{PJO}=\beta$ とおく。

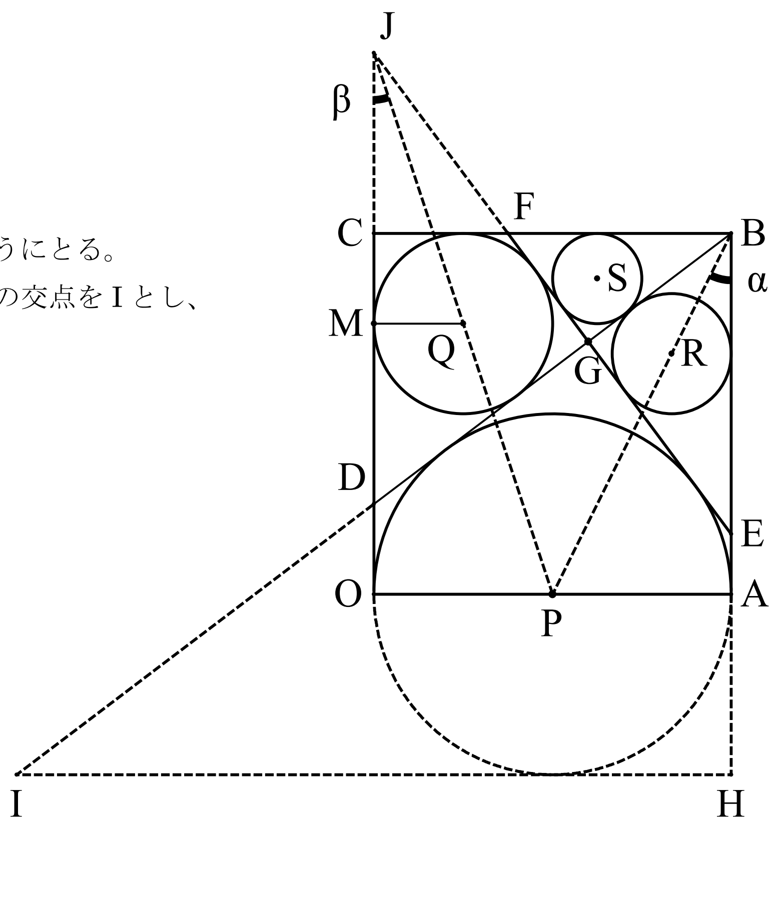
計算の流れのポイントは、

（１）　辺の比が3 : 4 : 5の直角三角形

（２）　$\mathrm{BD}\perp\mathrm{EF}$

の二つである。

以下、段階的に計算を進める。



（１） $\tan\angle\mathrm{BDC} = \tan\angle\mathrm{DBA}$ を求める。

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\tan\angle\mathrm{BDC} = \tan\angle\mathrm{DBA} = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3}$$

（２）$\triangle\mathrm{BHI} \backsim \triangle\mathrm{DCB}$ は，辺の比が $3:4:5$ の直角三角形である。

$\mathrm{BH} = 3$，$\mathrm{HI} = 4$，$\mathrm{IB} = 5$

$\mathrm{CB} = 2$，$\mathrm{DC} = \dfrac{3}{2}$，$\mathrm{BD} = \dfrac{5}{2}$

であるから，$q = \dfrac{1}{2}$ を得る。

（３）相似比が $1:2$ である、２つの直角三角形 JMQ と JOP について

$\mathrm{CM} = \dfrac{1}{2}$ より、$\mathrm{MO} = \dfrac{3}{2} = \mathrm{JM}$ であるから、$\mathrm{JO} = 3$ である。したがって，

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{JO}} = \frac{1}{3}$$

なので，

$$\tan\angle\mathrm{EJO} = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{3}{4}$$

を得る。（１）の結果と合わせて，$\mathrm{BD} \perp \mathrm{EF}$ である。

（４）$\triangle\mathrm{FGB}$ および $\triangle\mathrm{BGE}$ 共に、辺の比が $3:4:5$ の直角三角形である。

$$\mathrm{CF} = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathrm{BF} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow s = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{BE} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

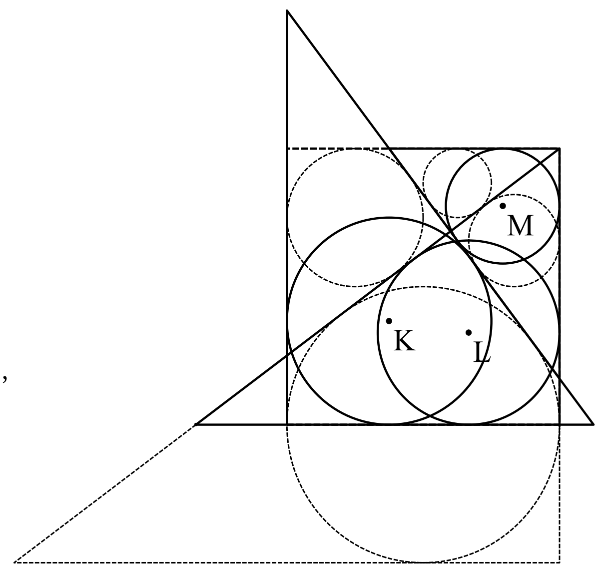
以上、まとめて，

$$p = 1,\ q = \frac{1}{2},\ r = \frac{1}{3},\ s = \frac{1}{4}$$

【おまけ】

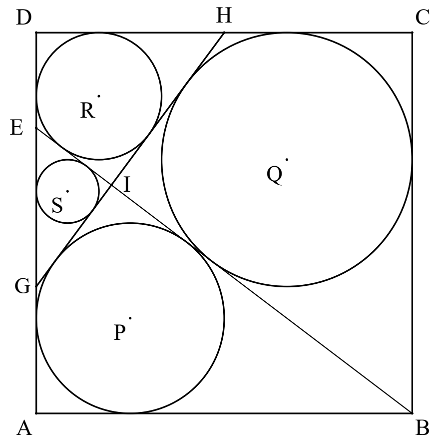
右図の辺の比が $3:4:5$ の直角三角形 K,L,M の半径は，

$k = \dfrac{3}{4},\ l = \dfrac{2}{3},\ m = \dfrac{5}{12}$ となる。



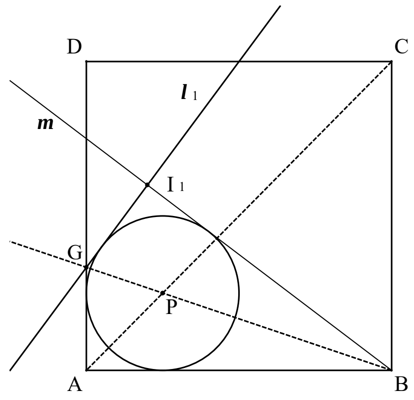
［問題２］

図のように一辺の長さが１の正方形 ABCD の中で，正方形の辺に接し，かつ２本の線分 BE，GH にも接するように４円 P，Q，R，S がある。円の半径をそれぞれ p, q, r, s とする。このとき，半径の比 $p:q:r:s$ を求めよ。



（解答）

２円 R,S の存在を仮定しない条件の下$\angle \mathrm{BIG} = \dfrac{\pi}{2}$を示す。

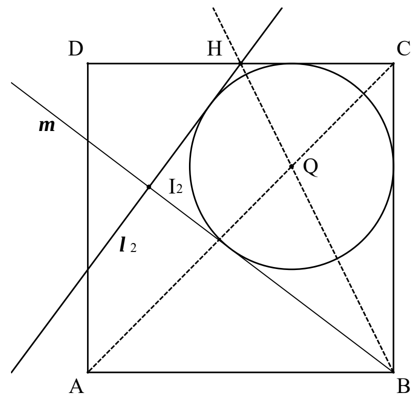


まず、直線 BP と辺 AD の交点を G とする。そして点 G と点 B から、円 P への接線l_1, mを右図のように引く。２直線l_1, mの交点をI_1とする。

このとき，辺 BG が共通で両端の角が等しいことから、

$$\triangle \mathrm{BAG} \equiv \triangle \mathrm{BI_1G}$$

である。したがって、$\mathrm{BA} = \mathrm{BI_1}$，$\angle \mathrm{BI_1G} = \angle \mathrm{BAG} = \dfrac{\pi}{2}$を得る。



次に、直線mと辺 BC および辺 CD に接する円 Q を描く。直線 BQ と辺 CD の交点を H とする。そして、点 H から、円 Q への接線l_2を右図のように引く。２直線l_2, mの交点をI_2とする。

このとき，辺 BH が共通で両端の角が等しいことから、

$$\triangle \mathrm{BCH} \equiv \triangle \mathrm{BI_2H}$$

である。したがって、$\mathrm{BC} = \mathrm{BI_2}$，$\angle \mathrm{BI_2H} = \angle \mathrm{BCH} = \dfrac{\pi}{2}$を得る。

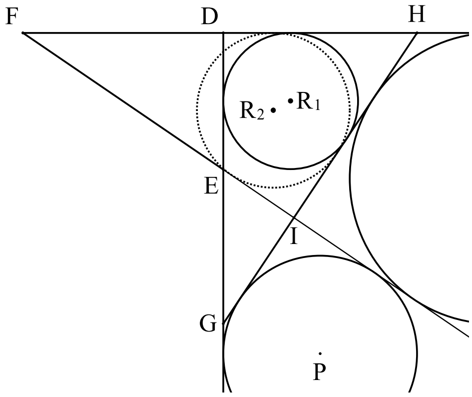
ところで，BA＝BC であるから，$\mathrm{BI_1} = \mathrm{BI_2}$となる。つまり、点$\mathrm{I}_1$と点$\mathrm{I}_2$は一致しているので、これを改めて点 I とする。また、２直線l_1, l_2は一致し、それは直線 GH に他ならない。

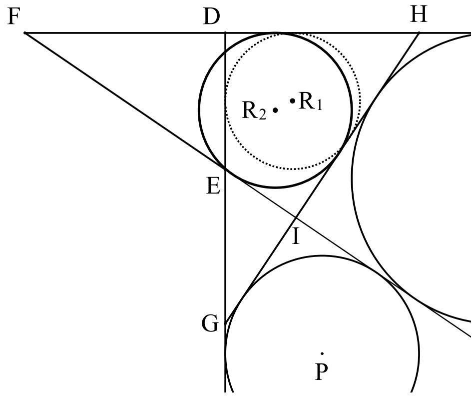
これらより，$\angle \mathrm{BIG} = \dfrac{\pi}{2}$である。

さて，円 R が存在するための条件を考察する。

直線 m と２直線 AD，CD の交点を E、F とする。

円 R は、四角形 DEIH の内接円である。この円 R が存在する条件は、２つの相似な直角三角形△DGH と△IFH の内接円 R_1, R_2 が一致することである。つまり△DGH≡△IFH となる事である。





したがって、HD=HI となる。前半部分の考察を加えて、HC=HD=HI となる。加えて△EIG の内接円を S とする。

最後に、R_1, R_2 が一致する条件の下、∠HBC＝∠HBI＝β とおくと HC＝tanβ であるから，

$$\tan\beta = \frac{1}{2}$$

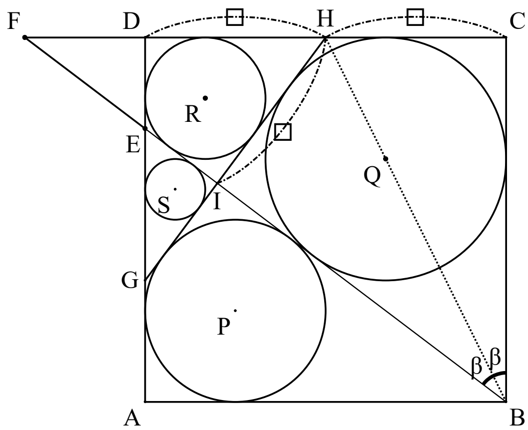
となる。したがって，

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

を得る。

つまり△BCF は辺の比が $3:4:5$ の直角三角形である。

$$q = \frac{1}{3}$$



さらに△EAB，△HDG，△EIG は，すべて△BCF と相似である。

それぞれ辺の長さから、内接円の半径を求めれば，

$$p = \frac{1}{4},\ r = \frac{1}{6},\ s = \frac{1}{12}$$

を得る。

したがって，

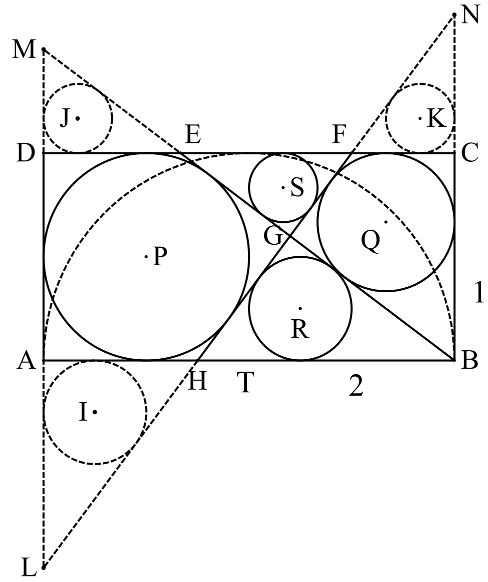
$$p:q:r:s = 3:4:2:1$$

である。

［参考文献］

日本の幾何―――何題解けますか？　深川英俊・ダンペドー著　森北出版　1991（問題 3. 2. 5）

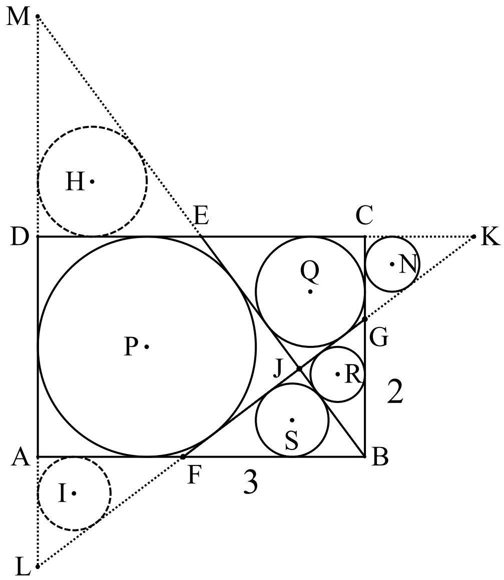
［追加問題１］



長方形 ABCD の辺の比を AB:BC = 2 : 1 とする。

この時，円の半径 $t,\ p,\ q, r,\ s,\ i,\ j, k$ の逆数の比を簡単な整数比で表せ。

［追加問題２］



長方形 ABCD の辺の比を AB:BC = 3 : 2 とする。

この時、円の半径 $p,\ q, r,\ s,\ h,\ i,\ s$ の逆数の比を簡単な整数比で表せ。