巴（ともえ）形の円の配列　 　　　　　　　　　　 堀部和経　2019/6/7



［問１］

１辺の長さが１の正三角形ABCの内部に３点K,L,Mがあり，

３つの三角形△ABK, △BCL, △CAMすべて合同であるという。

このとき明らかに，三角形KLMは正三角形であり，その内接円

と，合同な３つの三角形の内接円の半径がすべてであるという。

このとき，の値を決定せよ。

【問１・２・３すべての補足，内部の点K,・・・は，それぞれ隣の三角形の辺上にあるとする。】

［問２］

１辺の長さが１の正方形ABCDの内部に４点K,L,M,Nがあり，

４つの三角形△ABK, △BCL, △CDM, △DANがすべて合同で

あるという。このとき明らかに，四角形KLMNは正方形であるか

ら内接円は存在する。その内接円の半径と，合同な４つの三角形の

内接円の半径は，すべてであるという。

このとき，の値を決定せよ。

［問３］

１辺の長さが１の正６角形ABCDEF内に６個の点K,L,M,N,O,P

をとり，その点と６本の辺からできる６個の三角形がすべて

合同となるようにする。このとき，中央部に出来る正６角形

の内接円の半径と，６個の合同な三角形の内接円の半径は，

すべてであるという。

　このとき，の値を決定せよ。

【注意，点K以下の点を図では省略している。】

（参考図）



（準備）

 AB，BC，CAの△ABCと，その内接円Iを考察する。

内接円の半径をとし，内心Iから各辺に下ろした垂線の足

をH,J,Kとする。また，CJCK，∠ICJとおく。

このとき，△ABCの面積は，



である。（ただし，と略記した。）

（証明）

　△ICKにおいて，

　　　　

AKAH，BHBJ，CJCK，AKBJAB

であるから，

　　　

ところで，

　　　　　　　　■



（解答・問１）

中央の正三角形の面積を，３つの合同な三角形の面積をとする。

また，△ABCは一辺が１の正三角形であるから，



となる。右の拡大図において，３つの線分の長さをとおくと

，　

である。そして，





であるから，

　　



であるから，　を得る。

（さて，次の［問２］は至る所に直角があります。問１と比較すると計算が楽な感じですね。）

（解答・問２）

AKBL，BKとおくと，KLなので，となる。

△AKBは直角三角形なので，頂点と接点を結ぶ線分の長さを比べて

 

であるから，



したがって， より，を得る。

　ところで，であるから，なので，



を得る。したがって，



（解答・問３）

六角形ABCDEFは，一辺が１の正六角形であるから，

ABCDEF。また，中央の正六角形の面積を，

６つある合同な三角形の面積をとすると，



となる。さらに次の拡大図において，３つの線分の長さをとおく。

また，，　であるから，





であるから，

　　　　



であるから，



を得る。

ここまで，３つの場合の問題を考えてきた。正角形のをどんどん大きくしたときの半径の値は，どうなっていくのだろう。それを考えるために，任意の自然数に対して図の中の円の半径を求めてみよう。

［問４］（正角形への一般化）

１辺の長さが１の正角形ABC･･･内に個の点K･･･をとり，その点と本の辺からできる個の三角形がすべて合同となるようにする。このとき，中央部に出来る正角形の内接円の半径と，個の合同な三角形の内接円の半径は，すべてであるという。

　このとき， の値をを用いて表せ。

（問４・解答）

　問１および問３と同様の手法で考える。



△OAHにおいて，（と略記）

　

となり，正角形全体の面積をとすると，



また，中央の正六角形の面積を，個ある合同な三角形の面積をとする。

　さて，右の拡大図において，とおく。



であるから，



また，



である。そして，であるから，



両辺に，を掛け，

　　　　　　



であるから，

 

を得る。

を得たので，とすると，

であるから，



となる。

　右の図は，辺ABの位置を固定し，中央の円だけを重ねて描いた図である。が増すにつれ，円は辺から遠ざかるが，辺ABの長さの幅の中に収まっている。

さて，この等式を少し変型してみよう。

ただし，と略記する。









　今まで，考察してきた図形は，「一辺の長さがの正多角形」である。これは，が増すと，正多角形そのものが，どんどん大きくなっていく。正角形を一定の範囲の中にとどめる条件，・・・例えば「半径の円に内接する正多角形」という条件に変えた時の半径を考えてみよう。

問５

問４において，「１辺の長さが１の正角形」を「半径の円に内接する正多角形」とし，問題文の円の半径をとする。このとき の値をを用いて表せ。

（問５・解答）

　半径の円に内接する正角形の一辺をとすると，なので，比を考え，



である。この条件の下では，円の半径が最大になるのは，正５角形の時と分かる。



［半径と半径のグラフ］

当然であるが，の場合は，一辺の長さがの正６角形は，半径の円に内接するから，



となっている。

の場合は，以前から算額の問題として知られていました。この算額そのものは長らく現存しないと思われていましたが，平成２５年に伊豆韮山の江川邸の米蔵で発見されました。こういった事例は，珍しい事です。現在は，公益財団法人江川文庫の所蔵となっています。

の場合に円の半径が最大となっている。(からまでの図）









