「あみだクジ風確率」

きちんと、漢字表記すれば、「阿弥陀籤」となるあみだクジは、説明するまでもないとは、思うが、・・・。

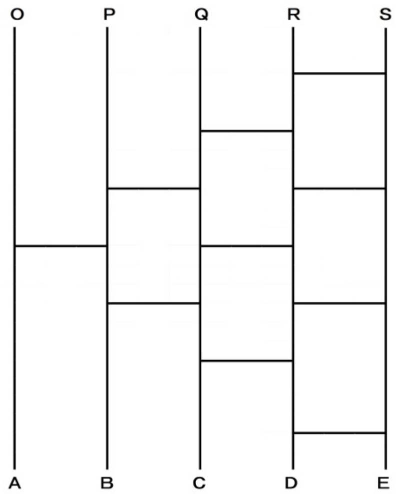

図１

【横線ルール（基本)】
点 O, P, Q, R, S から点をひとつ選び、そこから動点 M が移動する。点 M は縦線を下に進む。ただし、横線との交点（T の字、元々は丁の字であるが・・・）に来るたびに、横に移動する。

このルールで、クジを引いてみよう。図１のような、５本の縦線に横線が１０本のあみだクジについて確認しよう。

例えば、点 O を選ぶと点 E に達する。また、点 Q を選ぶと点 C に達する。点 S を選べば点Aという具合である。

さて、このあみだクジの横線に関するルールを次のように変更してみる。

【横線ルール（α)】
あみだクジのような図を考え、その図の線上を動点 M が移動する。
動点 M は、縦線を上から下に移動する。ただし，横線と交わる点（T 字に横線と縦線が交わる点）に、到達するたびに，確率$\dfrac{1}{2}$で横に移動し、確率$\dfrac{1}{2}$で下に移動する。

【横線ルール（α）の詳しい説明、図２参照】
上から下がって点 X に到達した時は、下と左に確率$\dfrac{1}{2}$で移動する。また、同様に点 Y に下がってきた時は、下と右に、確率$\dfrac{1}{2}$で移動する。つまり、上から下がってきて、T 字の点に来たときは，下と横に、等しく分かれて移動するという意味である。

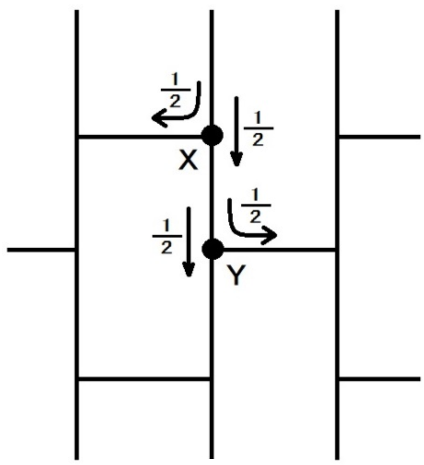

図２

［問題１］【横線ルール（α）】を使って、図４において点 S から動点 M が移動する。このとき、次の各問いに答えよ。

（１）点 A に到達する確率 $P(\mathrm{A})$ を求めよ。

（２）点 B に到達する確率 $P(\mathrm{B})$ を求めよ。

（３）点 C に到達する確率 $P(\mathrm{C})$ を求めよ。

（４）点 E に到達する確率 $P(\mathrm{E})$ を求めよ。

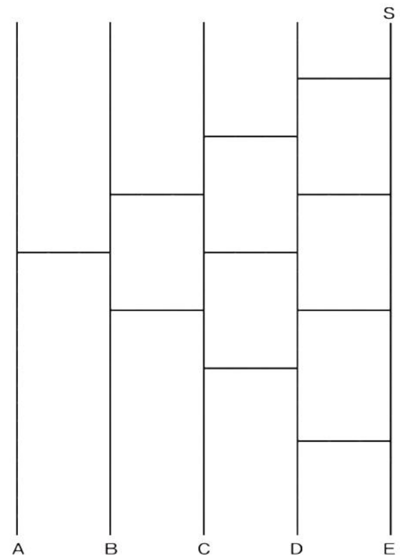

図３

【横線ルール（β）】

あみだクジのような図を考え、その図の線上を動点 M が移動する。

動点 M は、縦線を上から下に移動する。ただし，左向きの横線と交わる点では、確率 $\dfrac{1}{3}$ で横に移動し、確率 $\dfrac{1}{3}$ で下に移動する。また、確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動しないでそこにとどまる。

【横線ルール（β）の詳しい説明、図３参照】

上から下がって点 X に到達した時は、下と左に確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。また、確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動しないでそこにとどまる。

点 Y に下がってきた時や、右から来た時は、下向きに確率1で移動する。つまり、点 Y では、通常のあみだクジと同様の動きをする。

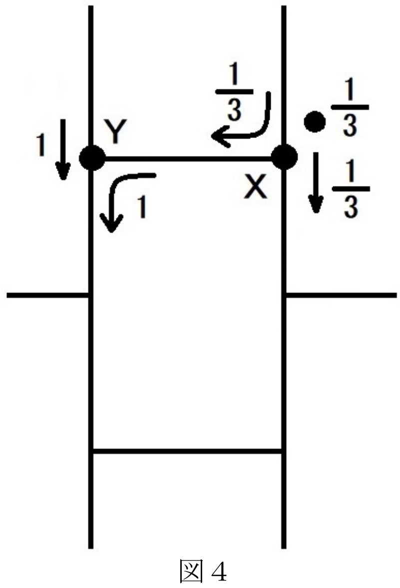

図４

［問題２］【横線ルール（β）】を使って、図５において、点Ｓから動点Ｍが移動する。このとき、次の各問いに答えよ。

（１）点Ａに到達する確率$P(\mathrm{A})$を求めよ。

（２）点Ｂに到達する確率$P(\mathrm{B})$を求めよ。

（３）点Ｃに到達する確率$P(\mathrm{C})$を求めよ。

（４）点Ｄに到達する確率$P(\mathrm{D})$を求めよ。

（５）点Ｅに到達する確率$P(\mathrm{E})$を求めよ。

（６）ＡからＥのどの点にも到達しない確率$P(0)$を求めよ。

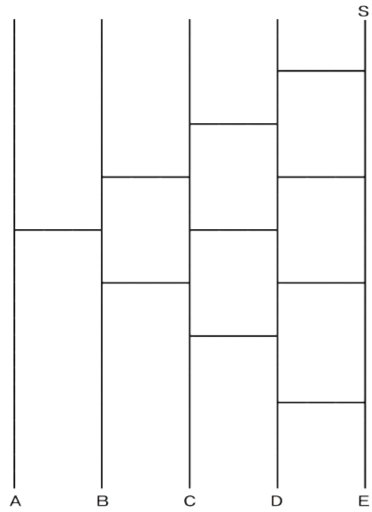

図５

【横線ルール（γ）】

あみだクジのような図を考え、その図の線上を動点 Ｍ が移動する。

動点は、縦線を上から下に移動する。ただし，左向きの横線と交わる点では、確率pで横に移動し、確率qで下に移動する。また、確率$1-p-q$で移動しないでそこにとどまる。（$0<p<1,\ 0<q<1$とする。）

【横線ルール（γ）の詳しい説明、図６参照】

横線ルール（β）の３つの確率$\dfrac{1}{3}$を、それぞれ

$p,\ q,\ (1-p-q)$と変更したもの。

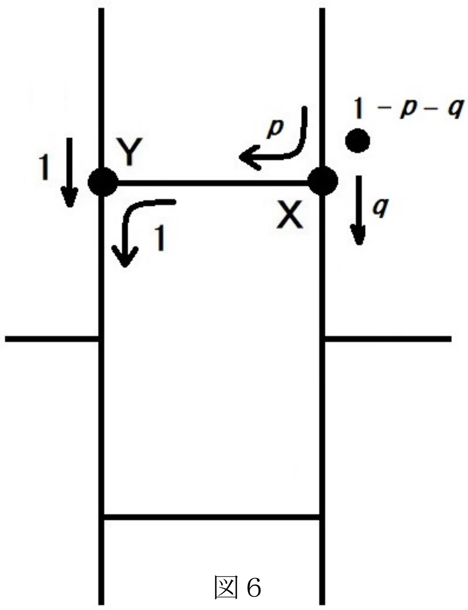

図６

［問題３］【横線ルール（γ）】を使って、［問題２］の図５において、点Ｓから動点Ｍが移動する。このとき、次の問いに答えよ。

（１）ＡからＥのどの点にも到達しない確率$P(0)$を求めよ。

（２）確率$P(0)>\dfrac{99}{100}$となる。条件を$p,\ q$で表せ。

［解答１］（１）確率$P(\mathrm{A})={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$　（２）確率$P(\mathrm{B})={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$

（３）確率$P(\mathrm{C})={}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}$　（※）確率$P(\mathrm{D})={}_7\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{35}{128}$

（４）確率$P(\mathrm{E})={}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{35}{128}$

［解答２］（１）確率$P(\mathrm{A})={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$　（２）確率$P(\mathrm{B})={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{81}$

（３）確率$P(\mathrm{C})={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{6}{81}$　（４）確率$P(\mathrm{D})={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{81}$

（５）確率$P(\mathrm{E})={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

（６）$P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})+P(\mathrm{C})+P(\mathrm{D})+P(\mathrm{E})$

$$={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=(1+1)^4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

確率$P(0)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$

［解答３］

（１）確率$P(0)=1-\left({}_4\mathrm{C}_0p^4q^0+{}_4\mathrm{C}_1p^3q^1+{}_4\mathrm{C}_2p^2q^2+{}_4\mathrm{C}_3p^1q^3+{}_4\mathrm{C}_4p^0q^4\right)$

$$=1-(p+q)^4$$

（２）$\frac{99}{100}<1-(p+q)^4$　より　$(p+q)^4<\frac{1}{100}$　であるから，$p+q<\frac{1}{\sqrt{10}}$