「虚数 ・ ことはじめ」　　カルダノ と ボンベリ を通して

$x^2=-1$となる数x，つまり虚数単位 i は，数学の歴史の中でどのように見つけられたのか，・・・。また，誰が「虚数」という概念を発見したかを紹介したいと思います。

歴史上のすべてを紹介するなんて無理ですから，カルダノとボンベリという２人の数学者を通して虚数の始まりの話をします。ただし，記号や説明は，現代風にアレンジして・・・。

１６世紀のヨーロッパで，３次方程式や４次方程式を代数的に解く公式を考えていた頃のお話です。当時は，まだ「数」と言えば「正の数」だけを考えていました。時代が下って１７世紀後半も，「負の数」は，数ではなかったのです。つまり，

- $x^2=2$
  $x=\sqrt{2}$
- $x^2+x=6$ ，$(x+3)(x-2)=0$
  $x=-3,\ 2$　だから，　$x=2$

の様な事を考えていました。

（日本の中学で）現在では，二次方程式$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$の解の公式として，

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{D}}{2a}\text{，}\quad D=b^2-4ac$$

を学びます。それと比較して，当時の二次方程式の考え方のひとつの例を紹介します。

$$\begin{cases} x^2+2x+3=0 & \Rightarrow \quad \text{あり得ない} \\ x^2+2x-3=0 & \Rightarrow \quad x^2+2x=3 \\ x^2-2x+3=0 & \Rightarrow \quad x^2+3=2x \\ x^2-2x-3=0 & \Rightarrow \quad x^2=2x+3 \end{cases} \quad \cdots（０）$$

１行目は左辺は正なのに０は矛盾，他の場合は両辺正なのであり得る，と考えていました。

皆さんは，負の数を考えることのできる現代で数学を学んでいるので，（０）のような考え方（場合分け）に意味を感じないでしょうね。

（注）当時でも「大きな数から小さい数を引く，$a-b$」という事は考えられていた。

３次４次方程式の解の公式の発見競争の時代，その渦中にあったひとりに着目します。医師で数学の教師もしていた，カルダノ（Girolamo Cardana, 1501－1576）です。カルダノの３次方程式の解法を紹介します。

３次方程式の３乗の係数を １ にしても，一般性を失さないので，

$$X^3+aX^2+bX+c=0 \quad \cdots（１）$$

を考る。変数を$X=x-\dfrac{a}{3}$と変換すると，$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^3+a\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+b\left(x-\dfrac{a}{3}\right)+c=0$である

から， $x^3-\left(\dfrac{a^2}{3}-b\right)x-\left(\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c\right)=0$ を得る。

ここで $3p=\dfrac{a^2}{3}-b$ ， $2q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$ とおけば（１）は，次のようになる。

$$x^3=3px+2q \quad ・・・（２）$$

以下，この３次方程式（２）の解を見つければよい。

カルダノは変数を１つから２つに増やす方法を思いつきました。つまり，解 x がふたつの数 s, t の和で表されると仮定し，計算を進めました。続きを書きましょう。

（２）において， $x=s+t$ とおく，

$$［左辺］=(s+t)^3=s^3+3s^2t+3st^2+t^3=3st(s+t)+\left(s^3+t^3\right)=3stx+\left(s^3+t^3\right)$$

であるから，

$$st=p, \qquad s^3+t^3=2q \quad ・・・（３）$$

を満たす s, t が求まれば（２）の解 $x=s+t$ を得る。

$t=\dfrac{p}{s}$ を（３）の第２式に代入し， $s^3+\left(\dfrac{p}{s}\right)^3=2q$ となり， $s^6-2qs^3+p^3=0$ を得る。

ここで， $s^3=u$ と置くと， $u^2-2qu+p^3=0$ となり，２次方程式の解の公式を使って，

$$u=q\pm\sqrt{q^2-p^3}$$

を得る。したがって，

$$s=\sqrt[3]{q\pm\sqrt{q^2-p^3}}$$

となり， $t=\sqrt[3]{q\mp\sqrt{q^2-p^3}}$ （複号同順）も得る。（ヒント： s と t は対称的）

$$x=s+t=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}} \quad ・・・（４）$$

よって，３次方程式（２）の解の公式をカルダノは発見した。

現代の感覚で「３乗根には３つの解があるので，この公式は値が確定していない」という指摘をするのは見当違いである。何故なら当時は，「複素数どころか負の数も存在しない」という時代だったのですから。議論の対象は，正の数だけなのです。つまり，q^2-p^3 が負とか，$q-\sqrt{q^2-p^3}$

が負の場合は意味が無いので，解を考えるためには方程式を他の形に変えて考えていたのです。
次に，この様な時代にボンベリ（Rafael Bombell, 1526－1572）が考えた，具体的な三次方程式をひとつ紹介します。

３次方程式

$$x^3=15x+4 \quad ・・・（５）$$

をカルダノの解の公式（２）と比較する。明らかに，$p=5,\ q=2$ であるから，

$$q^2-p^3=2^2-5^3=4-125=-121=-11^2$$

となり，根号の中に，「負の数」が，$\sqrt{q^2-p^3}=\sqrt{-121}$

で出来てしまう。

しかし，方程式（５）は解 $x=4$ を持つ事は明らかなので・・・,

$$4=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

に違いないと考えたようである。

ここでは，虚数単位の現代の記号“$\sqrt{-1}=i$ ”を使って書くことにして，ボンベリは，

$$4=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i} \quad ・・・（６）$$

は正しい，・・・が，どうしてこうなるのか？と考えた。

「普通の数と同じ計算するルールが成り立つ」のではないかと想像し，計算をした。

- $(2+i)^2=2^2+2\cdot2i+i^2=4-1+4i=3-4i$
- $(2+i)^3=(2+i)(3+4i)=6-4+8i+3i=2+11i$

（６）の右辺$=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}$

$$=2+i+2-i=4$$

途中，勝手に想像した $\sqrt{-1}=i$ という，「得体の知れないモノ」が，出てくるが，最後には，解 $x=4$ を得られる。したがって，３次方程式（５）も，カルダノの解法で解ける。

ボンベリの考えた ”$\sqrt{-1}=i$” ではあるが，ボンベリ自身もその価値を見いだせなかったようです。というのも，ボンベリ自身や，次の時代の大数学者，デカルト（1596－1650）やパスカル（1623－1662）でも，「負の数」のことを「虚構の数」，「偽りの数」，「発明された数」などと呼んでいました。

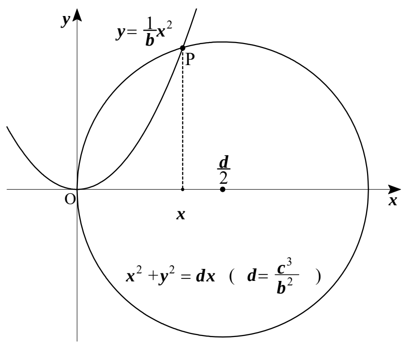
１７世紀から１８世紀になると，この虚数単位 $\sqrt{-1}=i$ も徐々に利用され，受け入れられてくるようになりました。

オイラー（L. Euler 1707－1783）やガウス（J. C. F. Gauss 1777－1855）の登場により，虚数・複素数も普通に「数」の仲間になりました。その結果，ガウス平面（複素数平面 $z=x+yi$，1811 頃），やオイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を普通に考えることができるようになりました。

虚数を初めて学ぶとき『$x^2=-1$ となる数 x を考えます』などと，驚くような話がはじまりますよね。昨日まで「すべての数は２乗すると，必ず正か零（0 ゼロ）」と，このように教えられていたのに・・・「今までの説明は何だったの？」と思いましたよね。

虚数の発見には，多くの人の知恵と努力，そして長い時間が必要だったのです。教科書では，今日に至るまでの長い歴史をすべて省いて，『$x^2=-1$ となる数 x を考えます』と，唐突に説明を始めていたのです。

［補足］①　「３次方程式を代数的に解く」以前に古代では，幾何学的に３次方程式を解いていた。現代の座標を使った形で説明する。



方程式 $x^3+b^2x=c^3$ の解は，右図のような放物線 $y=\dfrac{1}{b}x^2$ と円 $x^2+y^2=dx$ $\left(d=\dfrac{c^3}{b^2}\right)$ の交点Ｐの x 座標で求まる。

確認するには y, d を消去し，整理すればよい。

$$x^2+\left(\frac{1}{b}x^2\right)^2=\frac{c^3}{b^2}x \quad\Rightarrow\quad x^3+b^2x=c^3$$

②　現在，オイラーの公式と呼ばれているものは，$\log(\cos x+i\sin x)=ix$ （1714）という形で，ロジャー・コーツ（R. Cotes 1682－1716）が発見した。

参考文献　「Mathematics and Its History」John Stillwell　(Springer)　2010
「カッツ　数学の歴史」Victor J. Katz　（共立出版）2005
「ヴィジュアル複素解析」T. Needham　（培風館）2002
「数学史」武隅良一郎　　（培風館）1959

2018/07/01　堀部　和経