eが無理数であることの証明

この小論は、「eは無理数である」ことを、高校の数学を学んだ生徒に理解しやすいような形で証明することを目的としている。

１　準備

１．１　無限級数の和について

この小論に登場する無限級数は、すべて和を持つものだけであることを断っておく。

１．２　ある不等式の証明

$n \geq 1$のとき、　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{n!}$　である。

［証明］$n \geq 1$より、$n+1 \geq 2$である

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots \qquad ((n+1)\text{-times})$$

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \qquad ((n+2)\text{-times})$$

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \qquad ((n+3)\text{-times})$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

以下、同様。であるから、

$$\frac{1}{n!} \geq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\frac{1}{(n+2)!} > \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+3)!}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

となり、これらの不等式をすべて加えると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$$

左辺の和を１項だけ別に書くと、

$$\frac{1}{n!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$$

となり、左右で同じ項を消去すると、

$$\frac{1}{n!}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$$

となる。 ［証終］

２　eは無理数である

$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$　は、無理数である

［証明］背理法で示す。

e を有理数とすると、$e=\frac{b}{a}$ となる正の整数 a，b が存在する。

さて、$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ であるから、$e>\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ となる。したがって、$n\geq 1$ である n に対して、

$$0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}<\frac{1}{n!}$$

である。よって、

$$0<n!\cdot e-n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<1 \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

である。ところで、$n=a$ （≥ 1）とすると、

$$n!\cdot e=a\cdot\frac{b}{a}=(a-1)!\cdot b \text{ ：整数}$$

$$n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{a}\frac{a!}{k!} \text{ ：整数}$$　（なぜなら $k\leq a$ である），（$0!=1$ に注意）

すると、$n!\cdot e-n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ は、整数となり、①と矛盾する。 ［証終］

春日井東高校　堀部和経

※　この証明のアイデアは、よく知られているようだが、誰のアイデアかは、知らない。