eが無理数であることの証明

この小論は，「eは無理数である」ことを，高校の数学を学んだ生徒に理解しやすいような形で証明することを目的としている．

1　準備

1．1　無限級数の和について

この小論に登場する無限級数は，すべて和を持つものだけであることを断っておく．

1．2　ある不等式の証明

$n \geq 1$のとき、$\dfrac{1}{n!} < \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$　である。

参考　$\dfrac{1}{4!} < \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!} + \dfrac{1}{7!} + \cdots$

［証明］$n \geq 1$ より，$n+1 \geq 2$ である．

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \quad n+1\text{ 項}$$

参考　$\dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{4!} = \dfrac{4}{4!} = \dfrac{1}{3!}$

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(n+2)!} \quad n+2\text{ 項}$$

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{(n+3)!} \quad n+3\text{ 項}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

以下同様である．これらの等式の右辺の２項分の和と左辺を比較すれば，不等式

$$\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\frac{1}{(n+2)!} > \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+3)!}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

が得られる．これらの両辺をそれぞれ加えると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$$

と書ける．左辺の和の $k=0$ の項だけ別に書くことにして，

$$\frac{1}{n!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$$

となり，左右で同じ項があるので消去すると，

$$\frac{1}{n!}>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}$$

となる．［証明終わり］

２　eは無理数である

$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$　は、無理数である

［証明］背理法を用いて示す．つまり，e を有理数と仮定すると正の整数 a，b が存在し，$e=\frac{b}{a}$ とかける．

さて，$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ であるから，$e>\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ となる．したがって，$n\geq 1$ である n に対して，

$$0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)!}<\frac{1}{n!}$$

であるから，$0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!}$ の辺々に $n!$ をかけると，

$$0<n!\times e-n!\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<1 \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad ①$$

である．ここで，$n=a$（≥ 1）とすると，

$$n!\times e=a!\times\frac{b}{a}=(a-1)!\times b \text{ ：整数}$$

$$n!\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=a!\times\sum_{k=0}^{a}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{a}\frac{a!}{k!} \text{ ：整数}\quad（注意：k\leq a，0!=1）$$

すると，(①の中項）$=n!\times e-n!\times\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ は，整数となる．

不等式①により，0 と 1 の間に整数が存在することになり，矛盾する．［証明終わり］

堀部和経