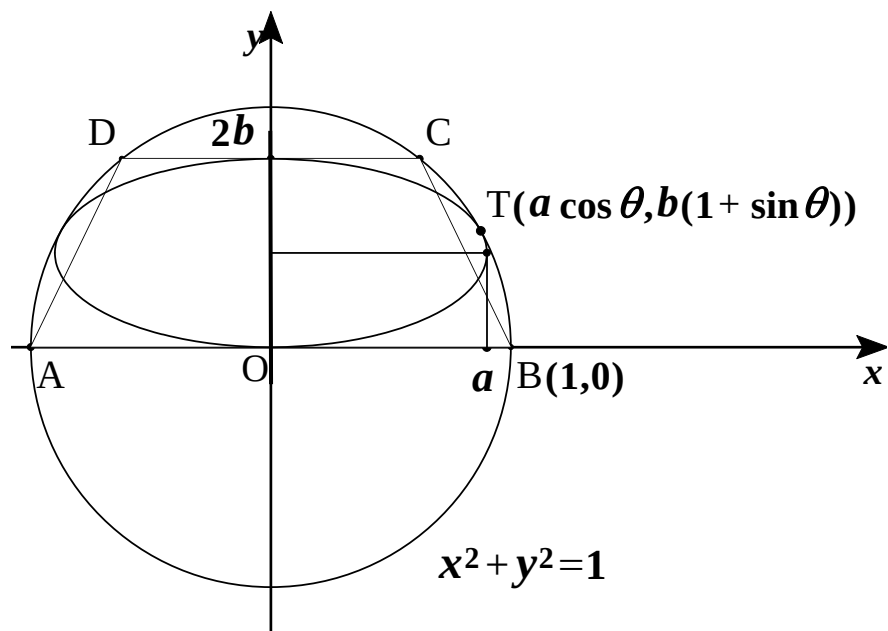


半円と楕円と等脚台形の接触問題

春日井東高等学校

堀部 和経

半円に接する楕円の長軸の長さは、半円に内接する短軸の上端を上底とする等脚台形の対角線の長さに等しい。つまり、 $AC=2a$ となる。



証明

上図のように、上半円内に接する楕円を考える。円Oを原点中心半径 1 とし、楕円の長軸 $2a$ を、短軸を $2b$ ($0 < b < a < 1$, $b < 0.5$) とする。すると、円の方程式は $x^2 + y^2 = 1$ 、

楕円の方程式は、 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ とおける。

以下、半円と楕円が 2 重接触する条件から、各種の条件式を求めてみよう。

楕円上の点 T の座標は、パラメータ θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を用いて $T(a \cos \theta, b(1 + \sin \theta))$ と書ける。すると、この点における楕円の接線は、 $\frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} (y - b) = 1$

である。これを整理すると、 $bx \cos \theta + ay \sin \theta - ab(1 + \sin \theta) = 0$

よって、この接線の法線ベクトルは、 $\vec{u} = (b \cos \theta, a \sin \theta)$ である。また、円における接線

にもなっているので、 $\vec{u} // \overrightarrow{OT}$ である。したがって、

$$b \cos \theta : a \sin \theta = a \cos \theta : b(1 + \sin \theta)$$

より、 $\cos\theta > 0$ なので、

$$a^2 \sin\theta = b^2(1 + \sin\theta)$$

を得る。したがって、

$$\sin\theta = \frac{b^2}{a^2 - b^2}, \quad 1 + \sin\theta = \frac{a^2}{a^2 - b^2}, \quad \cos^2\theta = \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{(a^2 - b^2)^2}$$

となる。

また、点 $T(a \cos\theta, b(1 + \sin\theta))$ は、円 O 上の点 $a^2 \cos^2\theta + b^2(1 + \sin\theta)^2 = 1$ である。よって、

$$a^2 \cdot \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{(a^2 - b^2)^2} + b^2 \cdot \frac{a^4}{(a^2 - b^2)^2} = 1$$

分母をはらって、 $a^4(a^2 - 2b^2) + a^4b^2 = (a^2 - b^2)^2$ から $a^4(a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)^2$ となり、

$a^2 - b^2 > 0$ なので、

$$b^2 = a^2 - a^4 \quad \dots \dots \dots (\ast)$$

次に、点 C の x 座標を求めるのだが、 $y = 2b$ と $x^2 + y^2 = 1$ を連立させればよい。

したがって、 $x^2 = 1 - 4b^2 = (2a^2 - 1)^2$ より $x = 2a^2 - 1$ となり、 $C(2a^2 - 1, 2b)$ を得る。

最後に、線分 AC の長さが長軸 $2a$ に等しいことを確認する。

$$AC^2 = ((2a^2 - 1) - (-1))^2 + 4b^2 = 4a^4 + 4(a^2 - a^4) = 4a^2$$

となり、 $AC = 2a$ であることが確認できた。

証終

注意

ところで、 b を変数 a の関数と見れば、単調減少関数である。それに関係式 $(\ast)$ を考察すれば、変数 a の定義域は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$$

である。したがって、証明の途中の複号についての疑義はない。

また、最終的に、接点 $T(\frac{\sqrt{2a^2 - 1}}{a}, \frac{a\sqrt{1 - a^2}}{a^2})$ を得る。

