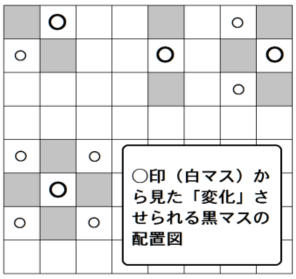

図１

白から黒へ「変化」する

正方形のボードのマス目が白と黒に分かれている。このとき，次のルールに従って順次マスの色が「変化」していくものとする。

$\boxed{\text{ルール①}}$　白マスの四方向（上下左右）のうち２カ所以上が黒マスのとき，その白マスは黒マスに「変化」する。（図１参照）

$\boxed{\text{ルール②}}$　黒マスは白マスに「変化」しない。

（例）８×８型のチェッカーボードの場合

図２，３のような８個黒マスの初期配置から，ボードのマス全てが黒マスに「変化」する事を確認してみよう。

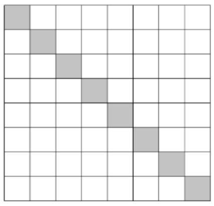

図２

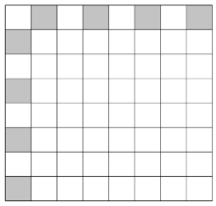

図３

また，どの白マスから「変化」させていくかの順序によらず最終的な白マスと黒マスの配置は同じである事を確認して下さい。

さて，次のことを証明してみよう。

$n \times n$ 型の正方形のボードがあり，初期配置の黒マスの数が n より少ないとき，どのような初期配置にしてもボードのマス全てが黒に「変化」することはない。

［証明］ルール①で「変化」する白マスに関して，その上下左右の黒マスの配置は，次のように４つに分類できる。（図４）但し，回転や対象移動で重なるものは同一視している。

矢印が元の黒マスを表し，白マスから黒マスに「変化」するマスを丸印で表している。

ＡからＤにおいて「変化」する前後の，黒マスの境界線の長さ，つまり黒マス部分の周囲長を測る。但し，マスの１辺を１とする。

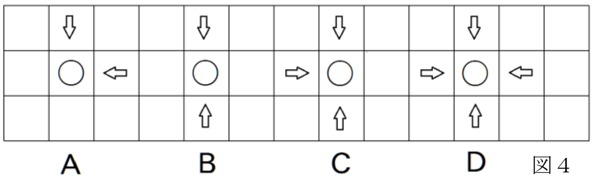

図４

Ａでは「変化」前は２マスが黒で，その周囲長は８であり，「変化」後は３マスが黒であり，周囲長は８である。同様にＢからＤの「変化」前後の周囲長を調べ表にする。（下表）

このことから，このルールにしたがってマスの色が「変化」すると黒マスの周囲長は，同じか減少する。つまり，決して増加はしない。

周囲長	A	B	C	D
感染前	8	8	１２	１６
感染後	8	8	１０	１２

さて，ここから命題を背理法で示す。

初期配置の黒マスの数が n より少ないので，黒マス部分の周囲長の最大値は $4(n-1)$ である。

ところが，「変化」させた後ボード全てが黒マスであるので，その周囲長は $4n$ となり，矛盾。

［証明終わり］

［補足］「周囲長が $4n$ の初期配置をすれば必ず全てのマスを感染できる」とは限らない。