# 展開図が三角形になる四面体

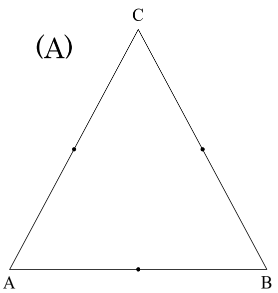
## [1]　　四面体の展開図になる可能性がある三角形の配置は3通りである。

四面体は、４つの三角形で出来ている。したがって、展開図を作るためには、３本の辺を繋いで４つの三角形を「ひとつの図形」にしなくてはならない。「辺」の延べ数は４×３＝１２なので、展開図中の「辺」は、１２－３＝９本である。３本の「辺」は三角形内部にあるので、残りの６本の「辺」は展開図の辺上にある。したがって、「辺」の辺への配置は、次の３通りである。

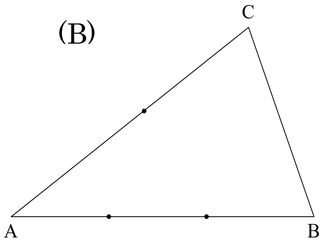
(注意)四面体の面の三角形の辺を「辺」と表した。

（A）６＝２＋２＋２　　（B）６＝３＋２＋１　　（C）６＝４＋１＋１

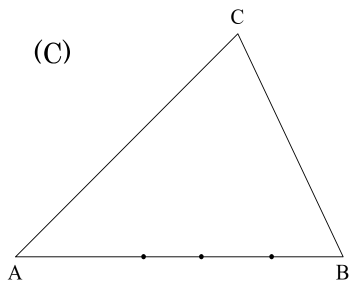
(A)




(B)



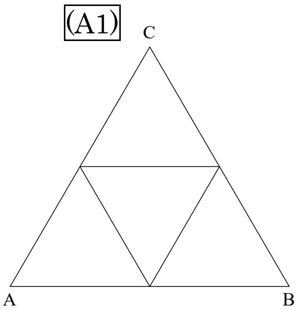

(C)



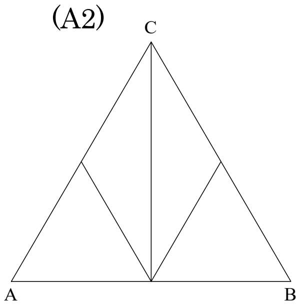

それぞれの場合について、三角形内部にある「辺」の配置を考える。

（A）２通り　　（C）１通り

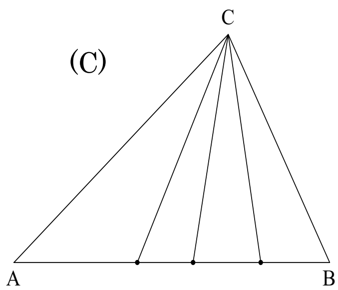
(A1)




(A2)

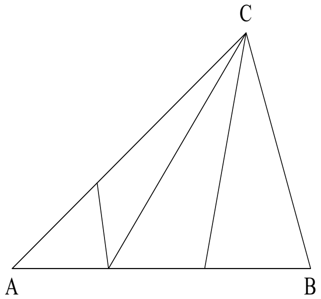



(C)

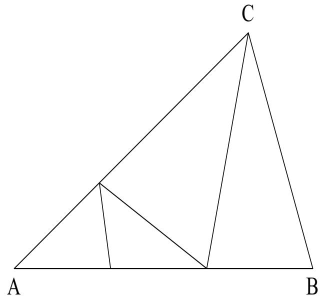



（B）３通り

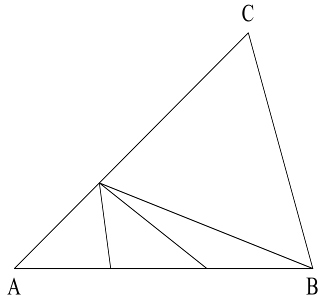
(B1)




(B2)



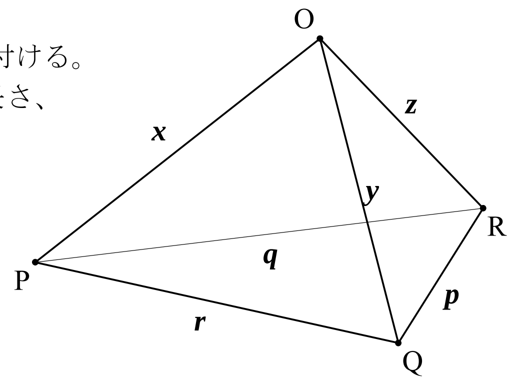

(B3)



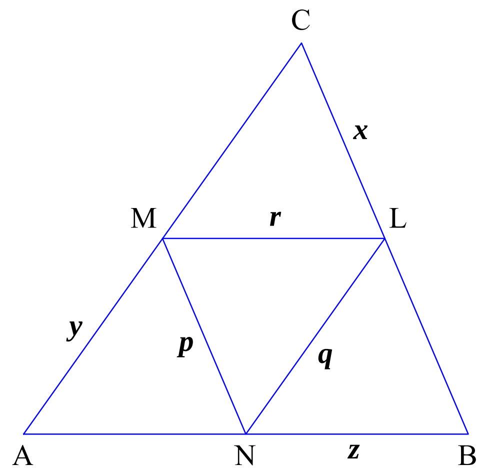

内部にある「辺」の配置は、この６通りである。しかし、(A2)，(B3)，(C)の場合は１つの頂点の周りに４つの三角形が配置されているので、四面体の展開図にはならない。ゆえに、(A1)，(B1)，(B2)の３通りの配置のみ四面体の展開図になる可能性がある。

## [2]「展開図」が組み立て可能になる必要条件

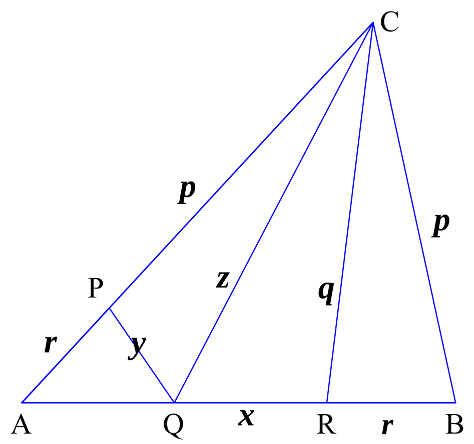
３つのパターンを改めて次のように Type1～3 と名付ける。
また、［２］の図中の記号 $p,q,r,x,y,z$ は各線分の長さ、位置関係は右の図のようである。



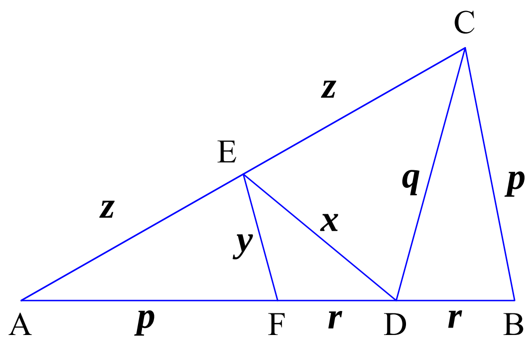

Type 1
１．三角形の各辺の中点 L , M , N をとる。
２．L-M-N を結んで，４つの合同な三角形を作る。




Type 2
０．CA > CB とする。
１．辺 CA 上に CP = CB を満たす点 P をとる。
２．辺 AB 上に，BR = AP を満たす点 R をとる。
３．線分 AR の中点を Q とする。
４．P-Q-C-R を結ぶ。




Type 3
０．AB > CB とする。
１．辺 AB 上に AF = CB を満たす点 F をとる。
２．線分 FB の中点を D とする。
３．線分 CA の中点を E とする。
４．C-D-E-F を結ぶ。



## [3] 「展開図」の組み立て可能条件（必要十分条件）

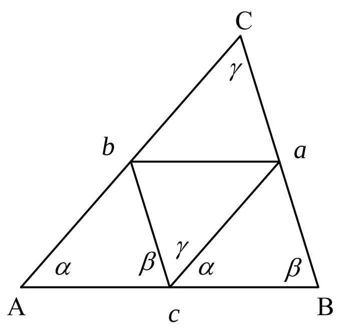
Type1～3 のいずれにおいても，元の三角形の形状によっては，（［２］のように展開図を作っても）四面体を組み立てられない場合がある。

そこで，以下では，四面体の組み立て可能な条件を調べてみた。

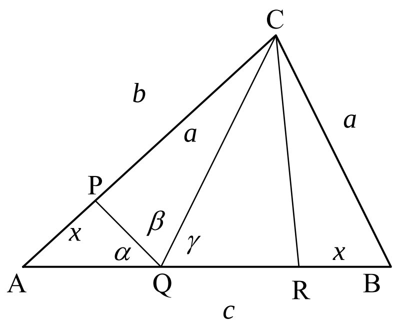
展開図が組み立て可能であるためには，ひとつの頂点（そこには３つの角が集まる）で組み立て可能であればよい。

なぜなら，ひとつの頂点で組み立て可能であれば，その頂点に接しない３つの辺が三角形を作るように、［２］「展開図」が組み立て可能になる必要条件で辺の分割点を設定した。

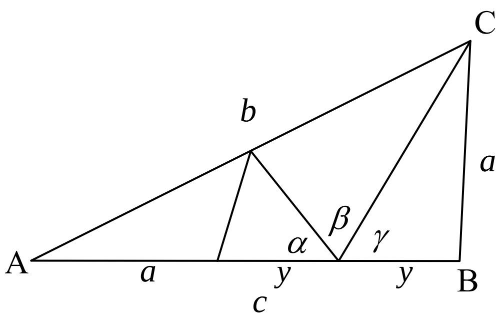
Type1




Type2




Type3




さて、上の３つの Type ともに、組み立て可能条件は、$\alpha, \beta, \gamma$ において，２角の和が残りの角より大きければよい。

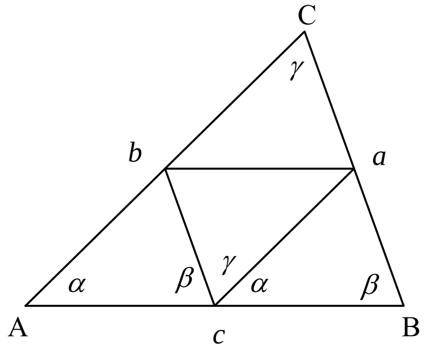
いま，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ なので，

$$\alpha<\beta+\gamma \Leftrightarrow \alpha<\pi-\alpha \Leftrightarrow \alpha<\frac{\pi}{2}$$

同様に、$\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ を得る。つまり、$\alpha, \beta, \gamma$ ともに鋭角である。

なお、下記の性質１～６については，[4]に証明がある。

## ◎組み立て可能条件（Type1）



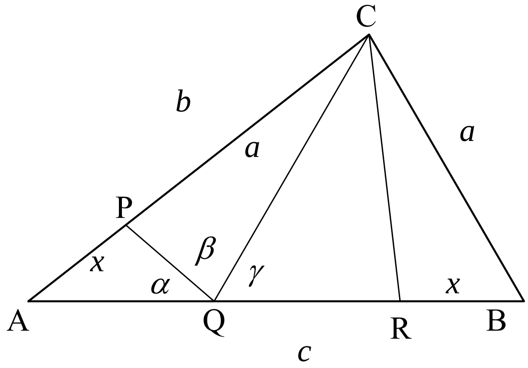

$\triangle$ABC が鋭角三角形である。

したがって，辺の条件としては，

$a^2+b^2>c^2$　かつ　$b^2+c^2>a^2$　かつ　$c^2+a^2>b^2$

である。

## ◎組み立て可能条件（Type2）　（$a<b$ とする）



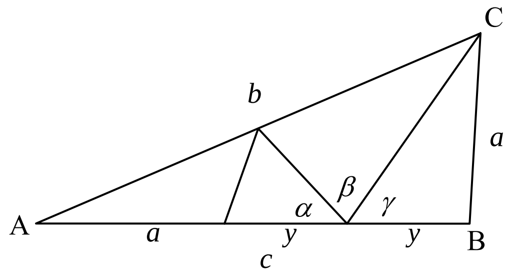

$\gamma$ は常に鋭角である。　　　　　（性質１）

$\alpha$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$a^2+ac>b^2$

　　　　　　$\Leftrightarrow$　$2A>B$　　　　　（性質２）

$\beta$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$a+c<2b$　　　　　（性質３）

## ◎組み立て可能条件（Type3）　（$a<c$ とする）



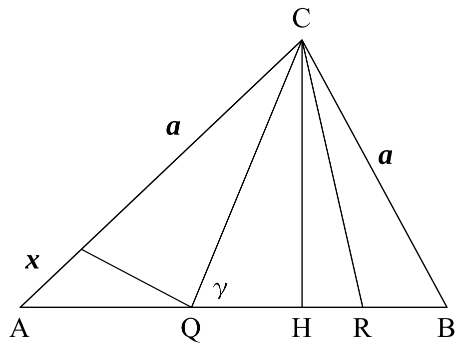

$\alpha$ は常に鋭角である。　　　　　（性質４）

$\beta$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$c<3a$　　　　　（性質５）

$\gamma$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$a^2+ac<b^2$

　　　　　　$\Leftrightarrow$　$2A<B$　　　　　（性質６）

## [4] 性質1～6の証明




（性質１）

$\gamma$ は常に鋭角である

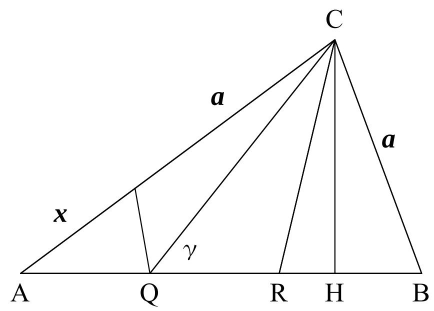
（証明）

頂点 C から対辺 AB に引いた垂線を CH とし，
辺 AB の中点を M とする。
$b>a$ より， $\mathrm{AM}<\mathrm{AH}$ である。よって、

$$\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\mathrm{AR}<\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\mathrm{AM}<\mathrm{AH}$$

であるから，

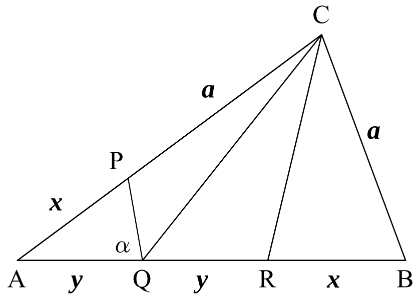
$$\gamma=\angle\mathrm{CQH}<90^\circ$$



（性質２）

$$\alpha \text{は鋭角} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + ac > b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2A > B$$

（証明）




$$\begin{aligned}
&\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{AQ}^2 - \mathrm{AP}^2 \\
&= (x^2 + y^2 - 2xy\cos A) + y^2 - x^2 \\
&= 2y^2 - 2xy\cos A \\
&= 2y(y - x\cos A)
\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{AQ}^2 - \mathrm{AP}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > x\cos A$$

ところで，

$$\begin{aligned}
&2bc(y - x\cos A) \\
&= 2bc \cdot \frac{c-b+a}{2} - 2bc(b-a)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= bc(c-b-a) - (b-a)(b^2+c^2-a^2) \\
&= -a^3 - b^3 + ab^2 + a^2b - b^2c + c^2a - abc \\
&= ac^2 + (ab-b^2)c - (a-b)(a^2-b^2) \\
&= (ac + a^2 - b^2)(c - a + b)
\end{aligned}$$

よって，

$$\alpha \text{は鋭角} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{PQ}^2 + \mathrm{AQ}^2 - \mathrm{AP}^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > x\cos A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + ac > b^2$$

次に，

$$\begin{aligned}
&a^2 + ac - b^2 \\
&= a^2 + ac - (c^2 + a^2 - 2ca\cos B) \\
&= c(a - c + 2a\cos B) \\
&= 2Rc(\sin A - \sin C + 2\sin A\cos B) \\
&= 2Rc\{\sin A - \sin(A+B) + 2\sin A\cos B\} \\
&= 2Rc(\sin A - \sin A\cos B - \cos A\sin B + 2\sin A\cos B) \\
&= 2Rc\{\sin A + \sin(A-B)\} \\
&= Rc\sin\frac{2A-B}{2}\cos\frac{B}{2}
\end{aligned}$$

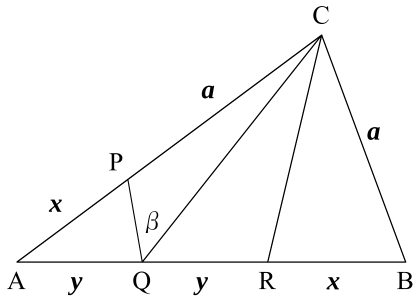
※但し、 $R$ は三角形 $ABC$ の外接円の半径

よって，

$$a^2 + ac > b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{2A-B}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A > B$$

（性質３）　$\beta$ は鋭角⇔　$a+c<2b$

（証明）




$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AP}\cos A$$
$$\mathrm{CQ}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}\cos A$$

ここで,

$$b=a+x\ ,\ c=x+2y$$

とおくと,

$$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{CQ}^2-\mathrm{CP}^2$$
$$=x^2+2y^2+(x+a)^2-a^2-2y(2x+a)\frac{(x+a)^2+(x+2y)^2-a^2}{2(x+a)(x+2y)}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\Delta &=2(x+a)(x+2y)(\mathrm{PQ}^2+\mathrm{CQ}^2-\mathrm{CP}^2)\\
&=2(x+a)(x+2y)\{2xa+2y^2+(x+a)^2-a^2\}\\
&\qquad -y(2x+a)\{(x+a)^2+(x+2y)^2-a^2\}\\
&=4\{(x+2y)a+x(x+2y)\}\{xa+(x^2+y^2)\}\\
&\qquad -4\{ya+2xy\}\{xa+(x^2+2yx+2y^2)\}
\end{aligned}$$

以下，$a$ の２次式として整理すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{4}&=x(x+2y)a^2+\{x^2(x+2y)+(x+2y)(x^2+y^2)\}a+x(x+2y)(x^2+y^2)\\
&\qquad -yxa^2-\{2yx^2+y(x^2+2yx+2y^2)\}a-2xy(x^2+2yx+2y^2)\\
&=x(x+2y)a^2+\{2x^3+4yx^2+y^2x+2y^3\}a+x(x^3+2yx^2+y^2x+2y^3)\\
&\qquad -yxa^2-\{3yx^2+2y^2x+2y^3\}a-x(2yx^2+4y^2x+4y^3)\\
&=x(x+y)a^2+(2x^3+yx^2-y^2x)a+x(x^3-3y^2x-2y^3)\\
&=x\{(x+y)a^2+(2x^2+yx-y^2)a+(x^3-3y^2x-2y^3)\}\\
&=x\{(x+y)a^2+(x+y)(2x-y)a+(x+y)(x^2-yx-2y^2)\}\\
&=x(x+y)\{a^2+(2x-y)a+(x+y)(x-2y)\}\\
&=x(x+y)(a+x+y)(a+x-2y)
\end{aligned}$$

また，$x=b-a$ , $y=\dfrac{1}{2}(a-b+c)$ なので,

$$a+x-2y=a+(b-a)+\frac{1}{2}(a-b+c)=2b-a-c$$

よって、$\Delta$ の符号は、$a+x-2y=2b-a-c$ に一致する。
したがって,

$$\beta\text{は鋭角}\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{PQ}^2+\mathrm{CQ}^2-\mathrm{CP}^2>0\quad\Leftrightarrow\quad\Delta>0\quad\Leftrightarrow\quad a+c<2b$$

（性質４）　$\alpha$ は鋭角である。

（証明）

$\mathrm{AD}=\mathrm{AF}+\mathrm{FD}=a+y>\mathrm{CD}$ より，

$\angle\mathrm{ADC}$ の二等分線が辺 AC と交わる点を P とすれば，

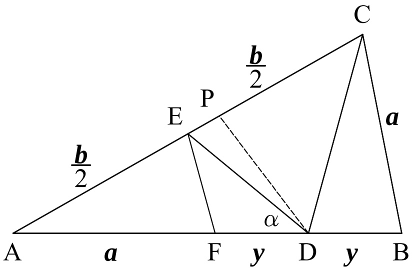
$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PC}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}>1$$

であり，点 E は辺 AC の中点だから，

点 E は線分 AP 上にある。

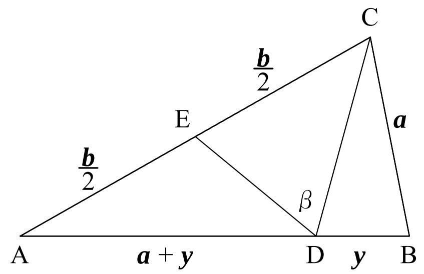
したがって，

$$\alpha<\angle\mathrm{ADP}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ADC}<\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$$




（性質５）

$\beta$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$c<3a$




（証明）

$$\mathrm{DE}^2=(a+y)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2(a+y)\frac{b}{2}\cos A$$
$$=\left(a+\frac{c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\left(a+\frac{c-a}{2}\right)\frac{b}{2}\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$
$$=\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\frac{c+a}{2}\frac{b}{2}\cdot\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{1}{4c}\left\{c(a+c)^2+cb^2-(c+a)(c^2+b^2-a^2)\right\}$$

$$\mathrm{CD}^2=y^2+a^2-2xa\cos B$$
$$=\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+a^2-2\left(\frac{c-a}{2}\right)a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$=\frac{1}{4c}\left\{c(c-a)^2+4ca^2-2(c-a)(a^2+c^2-b^2)\right\}$$

したがって，

$$4c(\mathrm{DE}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{CE}^2)$$
$$=c(a+c)^2+cb^2-(c+a)(c^2+b^2-a^2)$$
$$\quad+c(c-a)^2+4ca^2-2(c-a)(a^2+c^2-b^2)\quad-cb^2$$
$$=3a^3+5a^2c+ac^2-c^3-3ab^2+b^2c$$
$$=(3a-c)(a^2+2ab+b^2-c^2)$$
$$=(3a-c)(a+b+c)(a+b-c)$$

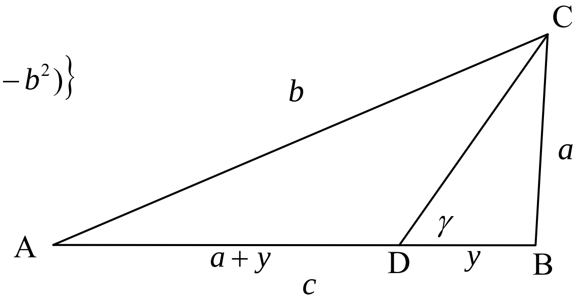
ゆえに，

$\beta$ は鋭角　$\Leftrightarrow$　$\mathrm{DE}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{CE}^2>0$　$\Leftrightarrow$　$c<3a$

（性質６）

$\gamma$は鋭角　$\Leftrightarrow$　$a^2+ac<b^2$

（証明）




$$\mathrm{CD}^2=\frac{1}{4c}\left\{c(c-a)^2+4ca^2-2(c-a)(a^2+c^2-b^2)\right\}$$

$$\mathrm{BD}^2=(c-y)^2=\left(c-\frac{c-a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(c-a)^2$$

より，

$$\begin{aligned}&4c(\mathrm{CD}^2+\mathrm{BD}^2-\mathrm{BC}^2)\\&=c(c-a)^2+4ca^2-2(c-a)(a^2+c^2-b^2)\\&\quad+c(c-a)^2-4ca^2\\&=(c-a)\{2c(c-a)-2(a^2+c^2-b^2)\}\\&=2(c-a)(-a^2+b^2-ac)\end{aligned}$$

したがって，

$\gamma$は鋭角である　$\Leftrightarrow$　$\mathrm{CD}^2+\mathrm{BD}^2-\mathrm{BC}^2>0$　$\Leftrightarrow$　$a^2+ac<b^2$

また，性質２と同様にして，

$a^2+ac<b^2$　$\Leftrightarrow$　$\sin\dfrac{2A-B}{2}<0$　$\Leftrightarrow$　$2A<B$

## [5]「展開図」を組み立てることが出来ない限界条件について

組み立て可能条件から，組み立てることができない限界の条件

$$c=3a$$
$$a^2+ac=b^2$$
$$a+c=2b$$

のそれぞれについて，条件を満たす三角形の形状を初等幾何学的方法で調べた結果を，次の補足１，補足２，補足３に示した。

（補足１）

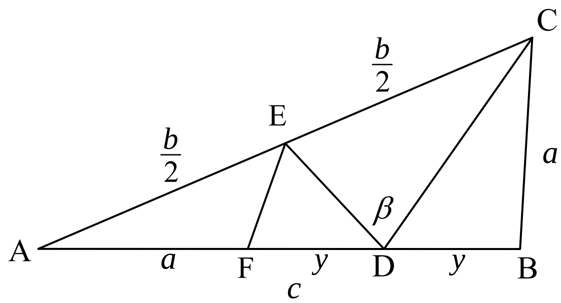
右図において，「$\beta$は鋭角　$\Leftrightarrow$　$c<3a$」

であり，性質５の証明を見ればわかるように，

$\beta$は直角　$\Leftrightarrow$　$c=3a$

である。

そこで，$a:c=1:3$ のときに $\beta=90°$ であることを初等幾何で確認する。



線分 AE の中点を T とすれば,

$$\mathrm{CT}:\mathrm{TA}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}=1:3$$

であるから，直線 BT は∠B を二等分する。

さらに，仮定より，

$$\mathrm{BC}=\frac{1}{3}\mathrm{AB}=\mathrm{BD}$$

であるから,

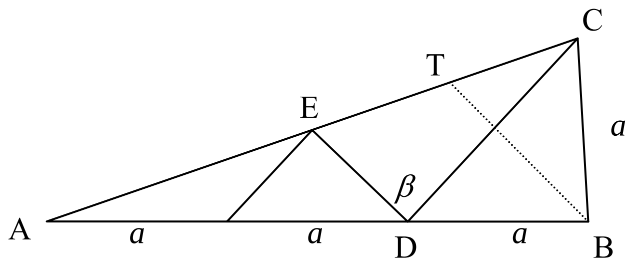
$$\mathrm{CD}\ \perp\ \mathrm{BT}$$

ここで,

$$\mathrm{BT}\ //\ \mathrm{DE}$$

であるから,

$$\mathrm{CD}\ \perp\ \mathrm{DE}$$



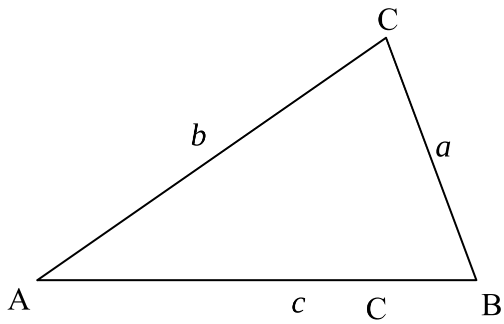

（補足２）

性質２と性質６では，不等号の向きが異なるだけの式が出てくる。

そこで，$a^2+ac=b^2$ について調べることで，性質２と性質６の関連を調べる。

$a^2+ac=b^2$ を満たすときの△ABC の形状を調べる。

性質６によれば，このとき $\gamma=90°$ である。




性質２の証明の後半と同様にして,

$$c=a+2a\cos B$$

であり，頂点 A から B に下ろした垂線を CD とするとき,

$$\mathrm{BD}=a\cos B$$

であるから,

「$\mathrm{CB}=\mathrm{CF}$ を満たす点 F を辺 AB 上にとれば,

$\mathrm{BC}=\mathrm{CF}=\mathrm{FA}=a$ 」

を得る。この条件を満たすとき,

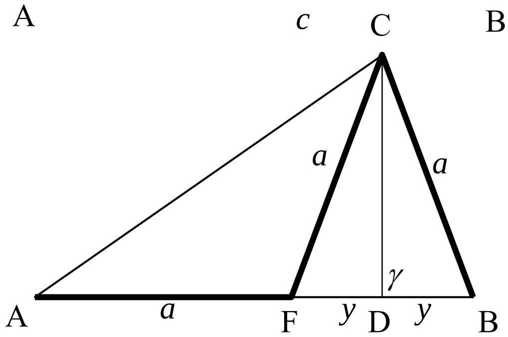
△ACB はΛ三角形である

と呼ぶことにする。

容易にわかるように,

△ACB がΛ三角形　⇔　2∠A＝ ∠B

である。




一方，$a^2+ac=b^2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{c-x}{b}$ であるから,

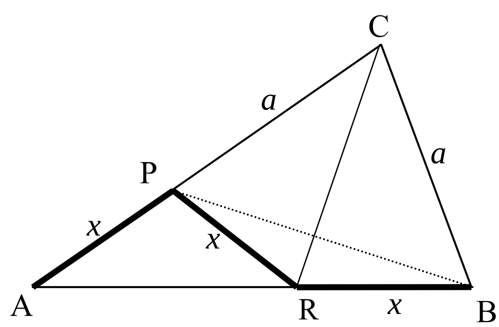
これは，直線 CR が∠C の二等分線になる条件である。

$\mathrm{CB}=\mathrm{CP}$ を考慮すれば,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PR}=\mathrm{RB}=x$$

よって,

$a^2+ac=b^2$　⇔　△BPA はΛ三角形




以上のことから,

△ACB がΛ三角形 $\Leftrightarrow$ $a^2+ac=b^2$ $\Leftrightarrow$ △BPA はΛ三角形

であることがわかる。

次のような、別証もある。

△ACB がΛ三角形 $\Leftrightarrow$ △BPA はΛ三角形

△ACB がΛ三角形のとき，

$\angle\mathrm{A}=2t$ とおけば，$\angle\mathrm{B}=4t$ であり，二等辺三角形 CBP の底角は $3t$ に等しい。

よって，$\angle\mathrm{PBA}=t$ となり，

$$2\angle\mathrm{PBA}=\angle\mathrm{PAB}$$

したがって，△BPA はΛである。（逆の証明は省略する）

（補足３）

△ABC で，３辺を $a$ , $b$ , $c$ とし，辺上の点 P , Q , R を次の条件を満たすようにとる。

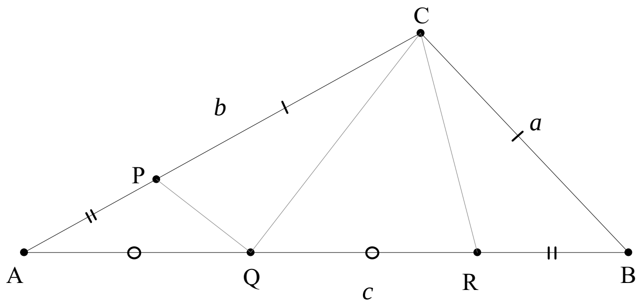
CP = CB , BR = AP , AQ = QR 。

このとき，次の３条件は同値である。

１． $a+c=2b$

２． $\angle\mathrm{PQC}=90°$

３． $\angle\mathrm{ACB}=2\angle\mathrm{QCR}$




（１⇒２の証明）

$c-b=b-a$ であるから，

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AC}=b$$

よって，

$$\angle\mathrm{ARC}=\angle\mathrm{ACR}$$

点 Q に関する点 P の対称点を P' とすれば，△APQ ≡ △RP'Q（２辺挟角）より，

$$\mathrm{P'R}=\mathrm{PA}=\mathrm{RB}$$

$$\angle\mathrm{CRP'}=\angle\mathrm{ARC}+\angle\mathrm{ARP}=\angle\mathrm{ACR}+\angle\mathrm{RAC}=\angle\mathrm{CRB}$$

よって，

△CRP' ≡ △CRB（２辺挟角）

これより，

$$\mathrm{CP'}=\mathrm{CB}=\mathrm{CP}$$

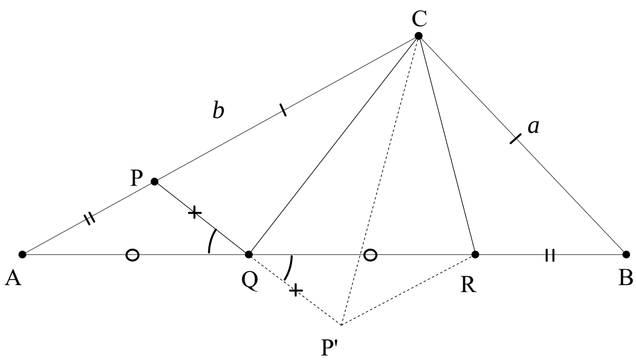
そうすると，

△CQP' ≡ △CQP （３辺相等）

であるから，

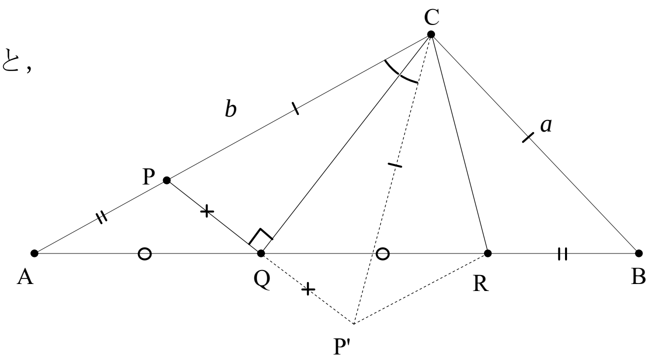
$$\angle\mathrm{CQP'}=\angle\mathrm{CQP}$$

よって，$\angle\mathrm{PQC}=90°$ を得る。



（２⇒３の証明）

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると，




$\angle QCA = \angle QCP'$　・・・①

$CP' = CP = CB$

また，$\angle PQC = 90°$ より，点 P'は点 Q に関する点 P の対称点であるから，

$P'R = PA = RB$

よって，

$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB$（３辺相等）

これより，

$\angle RCP' = \angle RCB$　・・・②

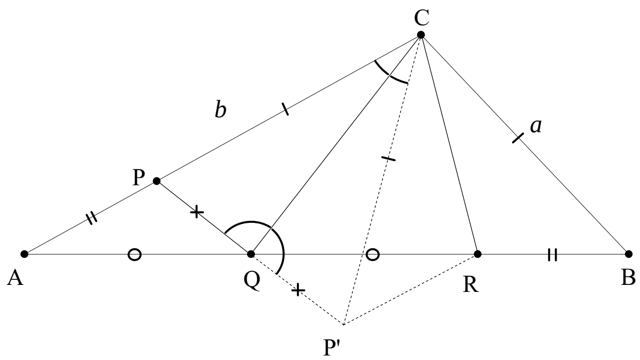
①，②より，$\angle ACB = 2\angle QCR$　を得る。

（３⇒１の証明）

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると，

$\angle ACB = 2\angle QCR$ より，

$\angle P'CR = \angle BCR$




また，

$CP' = CP = CB$

よって，

$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB$（２辺挟角）

これより，

$\angle CRP' = \angle CRB$

$RP' = RB = AP$

よって，

$\triangle APQ \equiv \triangle RP'Q$（３辺相等）

これより，

$\angle CRQ = \angle CRP' - \angle QRP' = \angle CRB - \angle QAP = \angle ACR$

したがって，

$AR = AC$

よって，

$c = AR + RB = AC + AP = b + (b - a)$

２００８／１２／２４

大阪教育大学付属高等学校池田校舎　友田　勝久
愛知県立春日井東高等学校　堀部　和経