

展開図が三角形になる四面体

[1] 四面体の展開図になる可能性がある三角形の配置は3通りである。

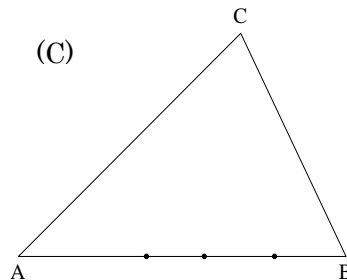
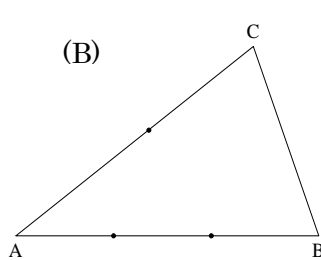
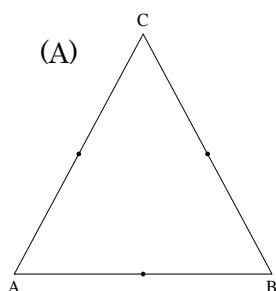
四面体は、4つの三角形で出来ている。したがって、展開図を作るためには、3本の辺を繋いで4つの三角形を「ひとつの図形」にしなくてはならない。「辺」の延べ数は $4 \times 3 = 12$ なので、展開図中の「辺」は、 $12 - 3 = 9$ 本である。3本の「辺」は三角形内部にあるので、残りの6本の「辺」は展開図の辺上にある。したがって、「辺」の辺への配置は、次の3通りである。

(注意) 四面体の面の三角形の辺を「辺」と表した。

(A) $6 = 2 + 2 + 2$

(B) $6 = 3 + 2 + 1$

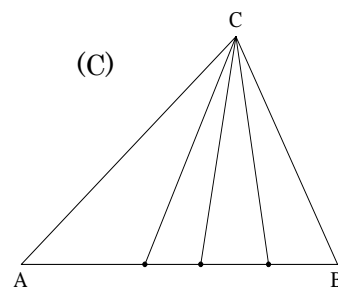
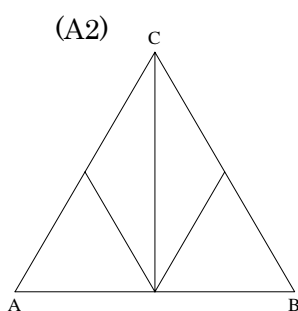
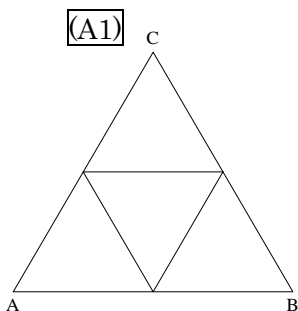
(C) $6 = 4 + 1 + 1$



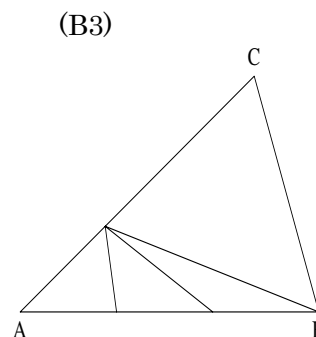
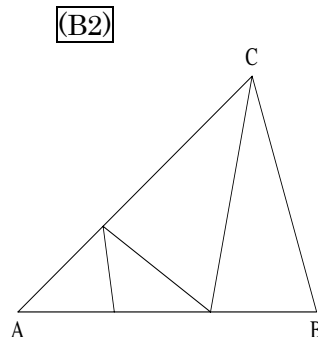
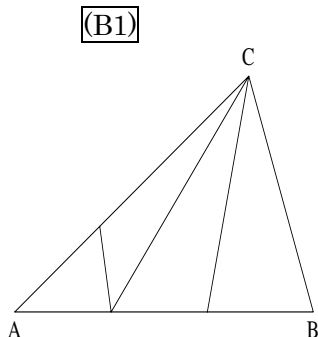
それぞれの場合について、三角形内部にある「辺」の配置を考える。

(A) 2通り

(C) 1通り



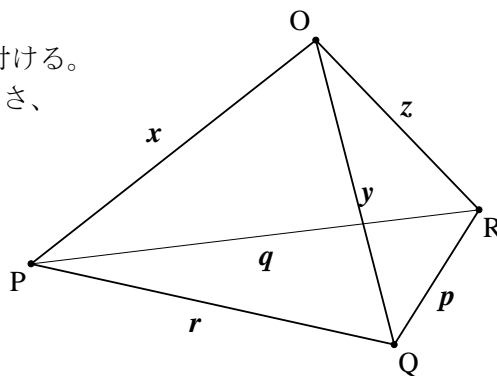
(B) 3通り



内部にある「辺」の配置は、この6通りである。しかし、(A2), (B3), (C)の場合は1つの頂点の周りに4つの三角形が配置されているので、四面体の展開図にはならない。ゆえに、(A1), (B1), (B2)の3通りの配置のみ四面体の展開図になる可能性がある。

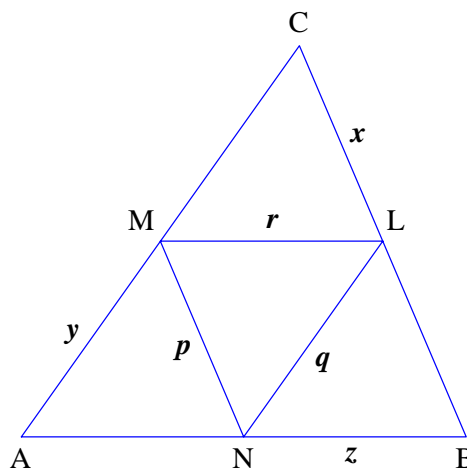
[2] 「展開図」が組み立て可能になる必要条件

3つのパターンを改めて次のように Type1~3 と名付ける。
 また、[2] の図中の記号 p, q, r, x, y, z は各線分の長さ、
 位置関係は右の図のようである。



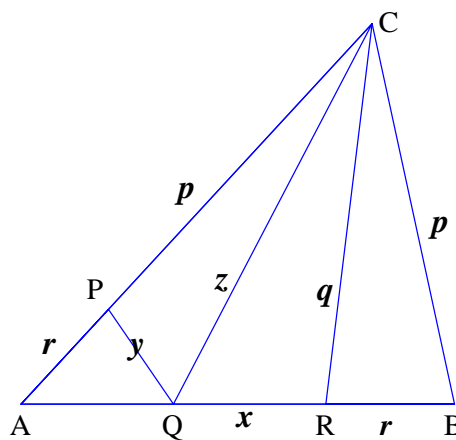
Type 1

1. 三角形の各辺の中点 L, M, N をとる。
2. $L \cdot M \cdot N$ を結んで、4つの合同な三角形を作る。



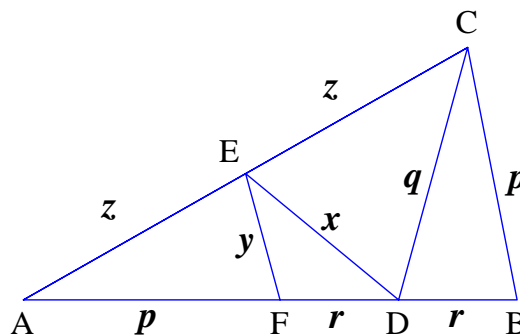
Type 2

0. $CA > CB$ とする。
1. 辺 CA 上に $CP = CB$ を満たす点 P をとる。
2. 辺 AB 上に、 $BR = AP$ を満たす点 R をとる。
3. 線分 AR の中点を Q とする。
4. $P \cdot Q \cdot C \cdot R$ を結ぶ。



Type 3

0. $AB > CB$ とする。
1. 辺 AB 上に $AF = CB$ を満たす点 F をとる。
2. 線分 FB の中点を D とする。
3. 線分 CA の中点を E とする。
4. $C \cdot D \cdot E \cdot F$ を結ぶ。



[3] 「展開図」の組み立て可能条件（必要十分条件）

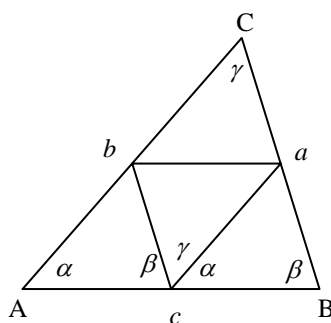
Type1~3のいずれにおいても、元の三角形の形状によっては、[2]のように展開図を作っても四面体を組み立てられない場合がある。

そこで、以下では、四面体の組み立て可能な条件を調べてみた。

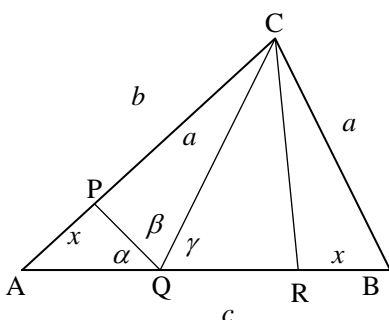
展開図が組み立て可能であるためには、ひとつの頂点（そこには3つの角が集まる）で組み立て可能であればよい。

なぜなら、ひとつの頂点で組み立て可能であれば、その頂点に接しない3つの辺が三角形を作るように、[2]「展開図」が組み立て可能になる必要条件で辺の分割点を設定した。

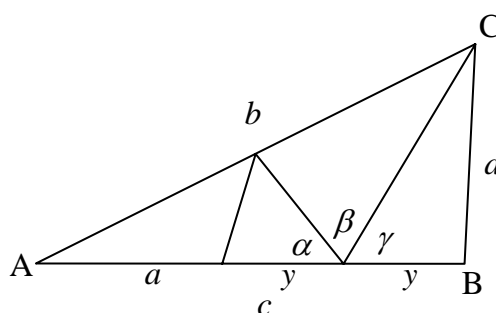
Type1



Type2



Type3



さて、上の3つのTypeともに、組み立て可能条件は、 α, β, γ において、2角の和が残りの角より大きければよい。

いま、 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ なので、

$$\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha < \pi - \alpha \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$$

同様に、 $\beta < \frac{\pi}{2}$, $\gamma < \frac{\pi}{2}$ を得る。つまり、 α, β, γ ともに鋭角である。

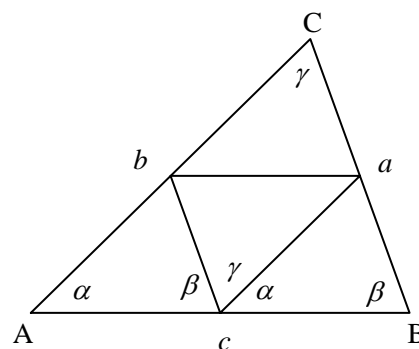
なお、下記の性質1~6については、[4]に証明がある。

◎組み立て可能条件 (Type1)

$\triangle ABC$ が鋭角三角形である。

したがって、辺の条件としては、

$a^2 + b^2 > c^2$ かつ $b^2 + c^2 > a^2$ かつ $c^2 + a^2 > b^2$ である。

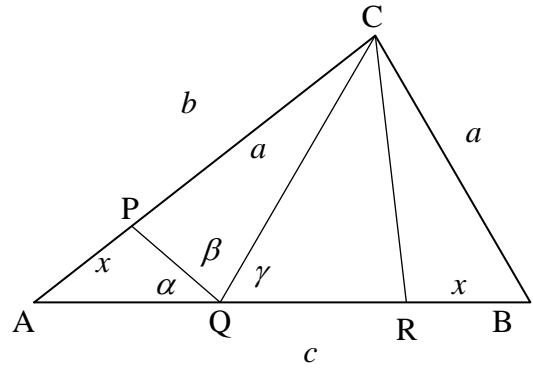


◎組み立て可能条件 (Type2) ($a < b$ とする)

γ は常に鋭角である。 (性質1)

α は鋭角 $\Leftrightarrow a^2 + ac > b^2$
 $\Leftrightarrow 2A > B$ (性質2)

β は鋭角 $\Leftrightarrow a + c < 2b$ (性質3)

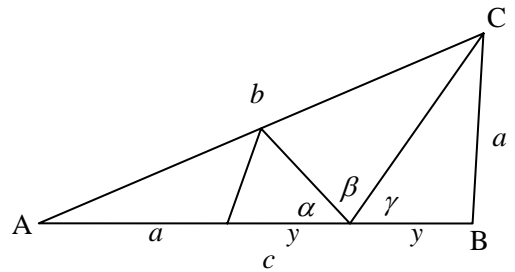


◎組み立て可能条件 (Type3) ($a < c$ とする)

α は常に鋭角である。 (性質4)

β は鋭角 $\Leftrightarrow c < 3a$ (性質5)

γ は鋭角 $\Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$
 $\Leftrightarrow 2A < B$ (性質6)



[4] 性質1～6の証明

(性質1)

γ は常に鋭角である

(証明)

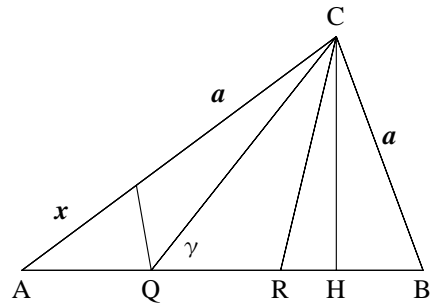
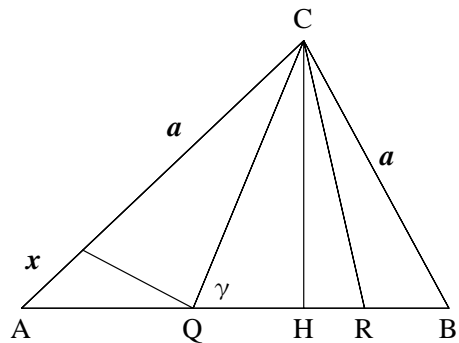
頂点Cから対辺ABに引いた垂線をCHとし、
 辺ABの中点をMとする。

$b > a$ より、 $AM < AH$ である。よって、

$$AQ = \frac{1}{2}AR < \frac{1}{2}AB = AM < AH$$

であるから、

$$\gamma = \angle CQH < 90^\circ$$



(性質 2)

$$\alpha \text{ は鋭角} \Leftrightarrow a^2 + ac > b^2 \Leftrightarrow 2A > B$$

(証明)

$$\begin{aligned} & PQ^2 + AQ^2 - AP^2 \\ &= (x^2 + y^2 - 2xy \cos A) + y^2 - x^2 \\ &= 2y^2 - 2xy \cos A \\ &= 2y(y - x \cos A) \end{aligned}$$

よって,

$$PQ^2 + AQ^2 - AP^2 > 0 \Leftrightarrow y > x \cos A$$

ところで,

$$\begin{aligned} & 2bc(y - x \cos A) \\ &= 2bc \cdot \frac{c - b + a}{2} - 2bc(b - a) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= bc(c - b - a) - (b - a)(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= -a^3 - b^3 + ab^2 + a^2b - b^2c + c^2a - abc \\ &= ac^2 + (ab - b^2)c - (a - b)(a^2 - b^2) \\ &= (ac + a^2 - b^2)(c - a + b) \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha \text{ は鋭角} \Leftrightarrow PQ^2 + AQ^2 - AP^2 > 0 \Leftrightarrow y > x \cos A \Leftrightarrow a^2 + ac > b^2$$

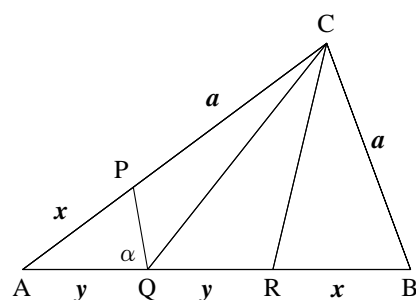
次に,

$$\begin{aligned} & a^2 + ac - b^2 \\ &= a^2 + ac - (c^2 + a^2 - 2ca \cos B) \\ &= c(a - c + 2a \cos B) \\ &= 2Rc(\sin A - \sin C + 2 \sin A \cos B) \\ &= 2Rc\{\sin A - \sin(A + B) + 2 \sin A \cos B\} \\ &= 2Rc(\sin A - \sin A \cos B - \cos A \sin B + 2 \sin A \cos B) \\ &= 2Rc\{\sin A + \sin(A - B)\} \\ &= Rc \sin \frac{2A - B}{2} \cos \frac{B}{2} \end{aligned}$$

※但し、 R は三角形 ABC の外接円の半径

よって,

$$a^2 + ac > b^2 \Leftrightarrow \sin \frac{2A - B}{2} > 0 \Leftrightarrow 2A > B$$



(性質3) β は鋭角 $\Leftrightarrow a+c < 2b$

(証明)

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AQ \cdot AP \cos A$$

$$CQ^2 = AC^2 + AQ^2 - 2AQ \cdot AC \cos A$$

ここで,

$$b = a + x, c = x + 2y$$

とおくと,

$$PQ^2 + CQ^2 - CP^2$$

$$= x^2 + 2y^2 + (x+a)^2 - a^2 - 2y(2x+a) \frac{(x+a)^2 + (x+2y)^2 - a^2}{2(x+a)(x+2y)}$$

よって,

$$\Delta = 2(x+a)(x+2y)(PQ^2 + CQ^2 - CP^2)$$

$$= 2(x+a)(x+2y)\{2xa + 2y^2 + (x+a)^2 - a^2\}$$

$$- y(2x+a)\{(x+a)^2 + (x+2y)^2 - a^2\}$$

$$= 4\{(x+2y)a + x(x+2y)\}\{xa + (x^2 + y^2)\}$$

$$- 4\{ya + 2xy\}\{xa + (x^2 + 2yx + 2y^2)\}$$

以下、 a の2次式として整理すると,

$$\frac{\Delta}{4} = x(x+2y)a^2 + \{x^2(x+2y) + (x+2y)(x^2 + y^2)\}a + x(x+2y)(x^2 + y^2)$$

$$- yxa^2 - \{2yx^2 + y(x^2 + 2yx + 2y^2)\}a - 2xy(x^2 + 2yx + 2y^2)$$

$$= x(x+2y)a^2 + \{2x^3 + 4yx^2 + y^2x + 2y^3\}a + x(x^3 + 2yx^2 + y^2x + 2y^3)$$

$$- yxa^2 - \{3yx^2 + 2y^2x + 2y^3\}a - x(2yx^2 + 4y^2x + 4y^3)$$

$$= x(x+y)a^2 + (2x^3 + yx^2 - y^2x)a + x(x^3 - 3y^2x - 2y^3)$$

$$= x\{(x+y)a^2 + (2x^2 + yx - y^2)a + (x^3 - 3y^2x - 2y^3)\}$$

$$= x\{(x+y)a^2 + (x+y)(2x-y)a + (x+y)(x^2 - yx - 2y^2)\}$$

$$= x(x+y)\{a^2 + (2x-y)a + (x+y)(x-2y)\}$$

$$= x(x+y)(a+x+y)(a+x-2y)$$

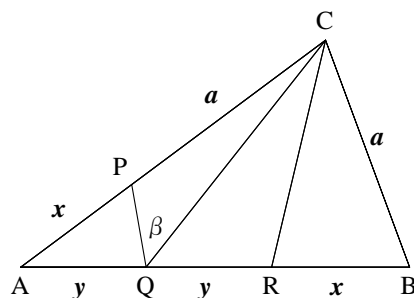
また、 $x = b - a, y = \frac{1}{2}(a - b + c)$ なので,

$$a + x - 2y = a + (b - a) + \frac{1}{2}(a - b + c) = 2b - a - c$$

よって、 Δ の符号は、 $a + x - 2y = 2b - a - c$ に一致する。

したがって,

$$\beta \text{は鋭角} \Leftrightarrow PQ^2 + CQ^2 - CP^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow a + c < 2b$$



(性質4) α は鋭角である。

(証明)

$$AD = AF + FD = a + y > CD \text{ より,}$$

$\angle ADC$ の二等分線が辺 AC と交わる点を P とすれば,

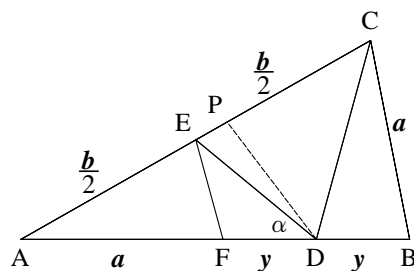
$$\frac{AP}{PC} = \frac{AD}{CD} > 1$$

であり, 点 E は辺 AC の中点だから,

点 E は線分 AP 上にある。

したがって,

$$\alpha < \angle ADP = \frac{1}{2} \angle ADC < \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

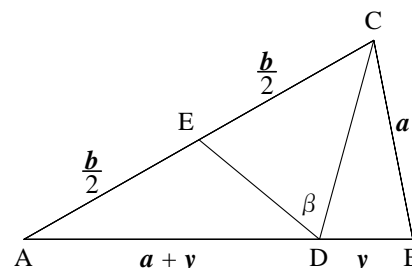


(性質5)

$$\beta \text{ は鋭角} \Leftrightarrow c < 3a$$

(証明)

$$\begin{aligned} DE^2 &= (a+y)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2(a+y)\frac{b}{2}\cos A \\ &= \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(a + \frac{c-a}{2}\right)\frac{b}{2} \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \\ &= \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\frac{c+a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{1}{4c} \left\{ c(a+c)^2 + cb^2 - (c+a)(c^2 + b^2 - a^2) \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} CD^2 &= y^2 + a^2 - 2ya\cos B \\ &= \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + a^2 - 2\left(\frac{c-a}{2}\right)a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{1}{4c} \left\{ c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \right\} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} &4c(DE^2 + CD^2 - CE^2) \\ &= c(a+c)^2 + cb^2 - (c+a)(c^2 + b^2 - a^2) \\ &\quad + c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) - cb^2 \\ &= 3a^3 + 5a^2c + ac^2 - c^3 - 3ab^2 + b^2c \\ &= (3a-c)(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) \\ &= (3a-c)(a+b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\beta \text{ は鋭角} \Leftrightarrow DE^2 + CD^2 - CE^2 > 0 \Leftrightarrow c < 3a$$

(性質6)

$$\gamma \text{は鋭角} \Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$$

(証明)

$$CD^2 = \frac{1}{4c} \{ c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \}$$

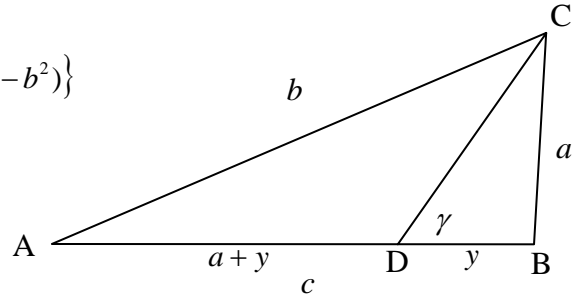
$$BD^2 = (c-y)^2 = \left(c - \frac{c-a}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(c-a)^2$$

より,

$$\begin{aligned} & 4c(CD^2 + BD^2 - BC^2) \\ &= c(c-a)^2 + 4ca^2 - 2(c-a)(a^2 + c^2 - b^2) \\ &\quad + c(c-a)^2 - 4ca^2 \\ &= (c-a) \{ 2c(c-a) - 2(a^2 + c^2 - b^2) \} \\ &= 2(c-a)(-a^2 + b^2 - ac) \end{aligned}$$

したがって,

$$\gamma \text{は鋭角である} \Leftrightarrow CD^2 + BD^2 - BC^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + ac < b^2$$



また, 性質2と同様にして,

$$a^2 + ac < b^2 \Leftrightarrow \sin \frac{2A-B}{2} < 0 \Leftrightarrow 2A < B$$

[5] 「展開図」を組み立てることが出来ない限界条件について

組み立て可能条件から, 組み立てることができない限界の条件

$$c = 3a$$

$$a^2 + ac = b^2$$

$$a + c = 2b$$

のそれぞれについて, 条件を満たす三角形の形状を初等幾何学的方法で調べた結果を, 次の補足1, 補足2, 補足3に示した。

(補足1)

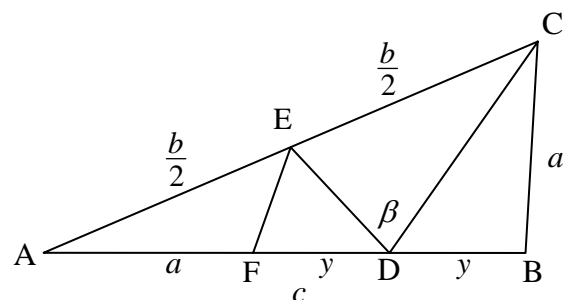
右図において, 「 β は鋭角 $\Leftrightarrow c < 3a$ 」

であり, 性質5の証明を見ればわかるように,

$$\beta \text{は直角} \Leftrightarrow c = 3a$$

である。

そこで, $a:c=1:3$ のときに $\beta=90^\circ$ であることを初等幾何で確認する。



線分 AE の中点を T とすれば,

$$CT : TA = BC : BA = 1 : 3$$

であるから, 直線 BT は $\angle B$ を二等分する。

さらに, 仮定より,

$$BC = \frac{1}{3}AB = BD$$

であるから,

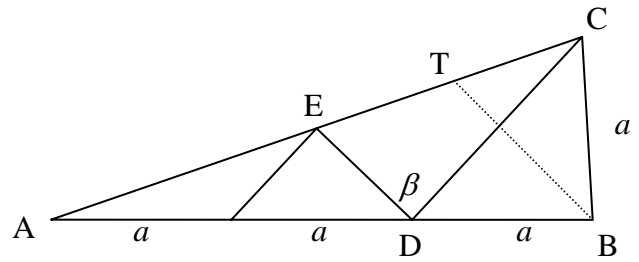
$$CD \perp BT$$

ここで,

$$BT \parallel DE$$

であるから,

$$CD \perp DE$$



(補足 2)

性質 2 と性質 6 では, 不等号の向きが異なるだけの式が出てくる。

そこで, $a^2 + ac = b^2$ について調べることで, 性質 2 と性質 6 の関連を調べる。

$a^2 + ac = b^2$ を満たすときの $\triangle ABC$ の形状を調べる。

性質 6 によれば, このとき $\gamma = 90^\circ$ である。

性質 2 の証明の後半と同様にして,

$$c = a + 2a \cos B$$

であり, 頂点 A から B に下ろした垂線を CD とするとき,

$$BD = a \cos B$$

であるから,

「 $CB = CF$ を満たす点 F を辺 AB 上にとれば,

$$BC = CF = FA = a$$

を得る。この条件を満たすとき,

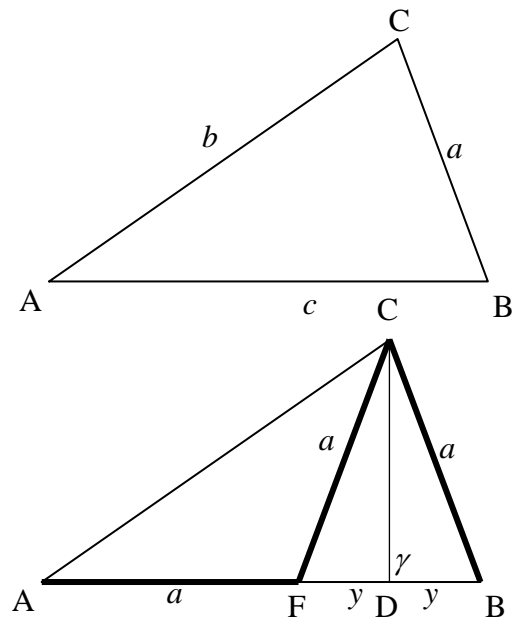
$\triangle ACB$ は Λ 三角形である

と呼ぶことにする。

容易にわかるように,

$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow 2\angle A = \angle B$$

である。



一方, $a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{c-x}{b}$ であるから,

これは, 直線 CR が $\angle C$ の二等分線になる条件である。

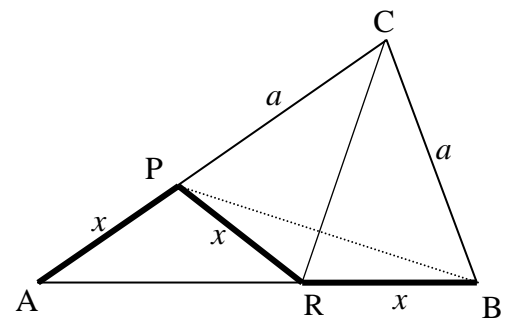
$CB = CP$ を考慮すれば,

$$AP = PR = RB = x$$

よって,

$$a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

以上のことから,



$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow a^2 + ac = b^2 \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

であることがわかる。

次のような、別証もある。

$$\triangle ACB \text{ が } \Lambda \text{ 三角形} \Leftrightarrow \triangle BPA \text{ は } \Lambda \text{ 三角形}$$

$\triangle ACB$ が Λ 三角形のとき、
 $\angle A = 2t$ とおけば、 $\angle B = 4t$ であり、二等辺三角形 CBP の底角は $3t$ に等しい。
 よって、 $\angle PBA = t$ となり、
 $2\angle PBA = \angle PAB$
 したがって、 $\triangle BPA$ は Λ である。(逆の証明は省略する)

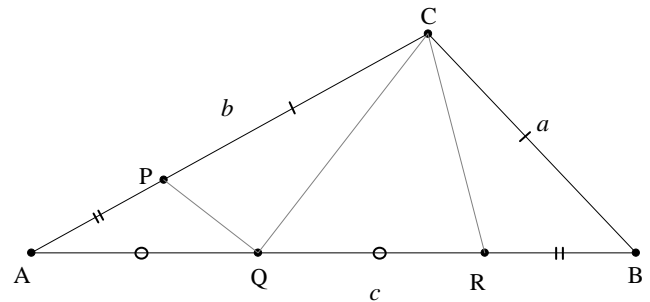
(補足3)

$\triangle ABC$ で、3 辺を a, b, c とし、辺上の点 P, Q, R を次の条件を満たすようにとる。

$$CP = CB, BR = AP, AQ = QR.$$

このとき、次の3条件は同値である。

1. $a + c = 2b$
2. $\angle PQC = 90^\circ$
3. $\angle ACB = 2\angle QCR$



(1 \Rightarrow 2 の証明)

$$c - b = b - a \text{ であるから,}$$

$$AR = AC = b$$

よって,

$$\angle ARC = \angle ACR$$

点 Q に関する点 P の対称点を P' とすれば、 $\triangle APQ \equiv \triangle RP'Q$ (2 辺挟角) より、

$$P'R = PA = RB$$

$$\angle CRP' = \angle ARC + \angle ARP = \angle ACR + \angle RAC = \angle CRB$$

よって,

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \text{ (2 辺挟角)}$$

これより,

$$CP' = CB = CP$$

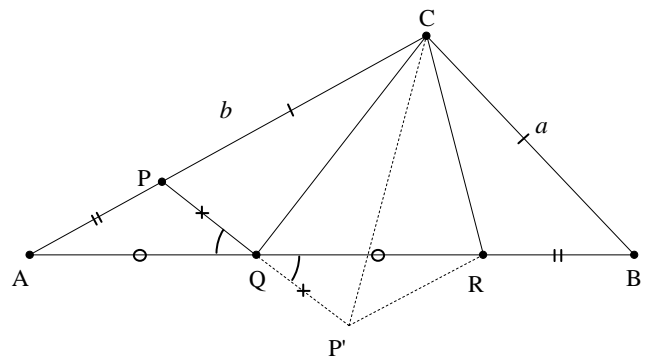
そうすると,

$$\triangle CQP' \equiv \triangle CQP \text{ (3 辺相等)}$$

であるから,

$$\angle CQP' = \angle CQP$$

よって、 $\angle PQC = 90^\circ$ を得る。



(2 ⇒ 3 の証明)

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると、

$$\angle QCA = \angle QCP' \quad \dots \textcircled{1}$$

$$CP' = CP = CB$$

また、 $\angle PQC = 90^\circ$ より、点 P' は点 Q に関する点 P の対称点であるから、

$$P'R = PA = RB$$

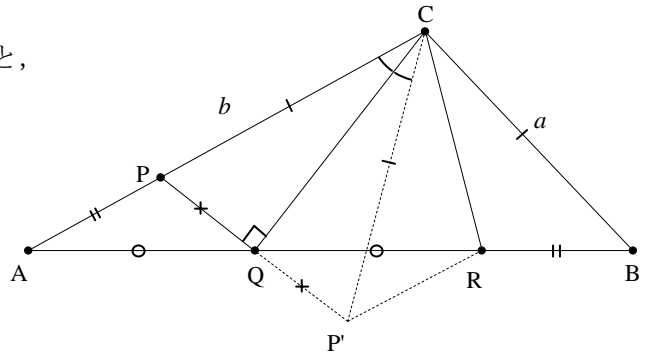
よって、

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \quad (3 \text{ 辺相等})$$

これより、

$$\angle RCP' = \angle RCB \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\angle ACB = 2\angle QCR$ を得る。



(3 ⇒ 1 の証明)

直線 CQ に関する点 P の対称点を P' とすると、

$\angle ACB = 2\angle QCR$ より、

$$\angle P'CR = \angle BCR$$

また、

$$CP' = CP = CB$$

よって、

$$\triangle CRP' \equiv \triangle CRB \quad (2 \text{ 辺挟角})$$

これより、

$$\angle CRP' = \angle CRB$$

$$RP' = RB = AP$$

よって、

$$\triangle APQ \equiv \triangle RP'Q \quad (3 \text{ 辺相等})$$

これより、

$$\angle CRQ = \angle CRP' - \angle QRP' = \angle CRB - \angle QAP = \angle ACR$$

したがって、

$$AR = AC$$

よって、

$$c = AR + RB = AC + AP = b + (b - a)$$

