

トーラスとある平面との交線

§ 1 MATHEMATICA-Animation

トーラスTのパラメータ表示は、

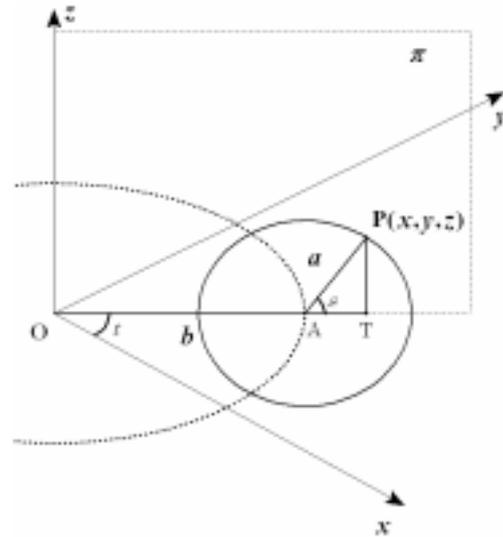
$$x = (a \cos s + b) \cos t$$

$$y = (a \cos s + b) \sin t \quad \dots\dots\dots$$

$$z = a \sin s$$

である。

MATHEMATICA を用いて、
作ったアニメ作成用の
CODE を記す。



$$a = 3;$$

$$b = 6;$$

$$c = \text{Sqrt}[b^2 - a^2];$$

$$\text{fx}[s_, t_] := (a * \text{Cos}[s] + b) \text{Cos}[t];$$

$$\text{fy}[s_, t_] := (a * \text{Cos}[s] + b) \text{Sin}[t];$$

$$\text{fz}[s_, t_] := a \text{Sin}[s];$$

$$\text{fxx}[s_, t_] := (c * \text{fx}[s, t] + a * \text{fz}[s, t]) / b;$$

$$\text{fyy}[s_, t_] := \text{fy}[s, t];$$

$$\text{fzz}[s_, t_] := (-a * \text{fx}[s, t] + c * \text{fz}[s, t]) / b;$$

Do[

ParametricPlot3D[{fxx[s, t], fyy[s, t], fzz[s, t]},

{t, -Pi, Pi}, {s, -Pi, Pi},

PlotRange -> {{-(a + b + 1), a + b + 1}, {-(a + b + 1), a + b + 1}, {-(a + b + 1) + i, i}},

Axes -> False, PlotPoints -> {51, 71},

ViewPoint -> {0.934, -1.725, 2.757},

DisplayFunction -> \$DisplayFunction],

{i, b, -b, -1}]

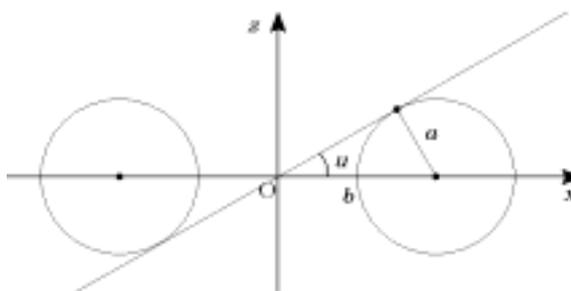
§ 2 交線が交わる2円になる証明

トーラスTの方程式は、パラメーター表示 から、 s, t を消去すると次のようになる。

$$T : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2 \dots\dots\dots$$

これは、直接、直角三角形APTにおいて、ピタゴラスの定理を用いてもよい。

さて、図のように y 軸を含み x 軸と角 u で交わる平面とトーラスの断面を考えるために、 y 軸を回転軸とする角度 $(-u)$ の回転を考える。



回転後の座標を、 (X, Y, Z) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-u) & 0 & -\sin(-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-u) & 0 & \cos(-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

である。

ところで、 $\cos u = \frac{c}{b}, \sin u = \frac{a}{b}$ 但し、 $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{b} & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & \frac{c}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

となる。

さて、回転後の平面 $Z = 0$ 上の曲線を調べてみよう。

方程式 に、 $Z = 0$ とおいた を代入すると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\frac{c}{b}X\right)^2 + Y^2} - b \right\}^2 + \left(\frac{a}{b}X\right)^2 = a^2$$

となる。分母を払い、 c を消去すると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\sqrt{b^2 - a^2}X\right)^2 + (bY)^2} - b \right\}^2 + (aX)^2 = a^2b^2$$

であるから、展開し整理する。

$$X^2 + Y^2 + b^2 - a^2 = 2\sqrt{(b^2 - a^2)X^2 + b^2Y^2}$$

を得るので、両辺を2乗すると、

$$(X^2 + Y^2 + b^2 - a^2)^2 = 4(b^2 - a^2)X^2 + 4b^2Y^2$$

となる。以下、この式を整理し、因数分解することが出来るので、順に書いていく。

$$X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 - 2(b^2 - a^2)X^2 - 2(b^2 + a^2)Y^2 + (b^2 - a^2)^2 = 0$$

$$(X^2 - b^2)^2 + 2(Y^2 + a^2)(X^2 - b^2) + (Y^2 - a^2)^2 = 0$$

$$\{(X^2 - b^2) + (Y + a)^2\} \{(X^2 - b^2) + (Y - a)^2\} = 0$$

したがって、

$$X^2 + (Y + a)^2 = b^2 \quad , \quad X^2 + (Y - a)^2 = b^2$$

を得る。つまり、ともに半径が b 、中心が $(0, a)$ と $(0, -a)$ の2円となる。

