2018/05/27 堀部　和経

球面三角形の定理　　高校生に向けて

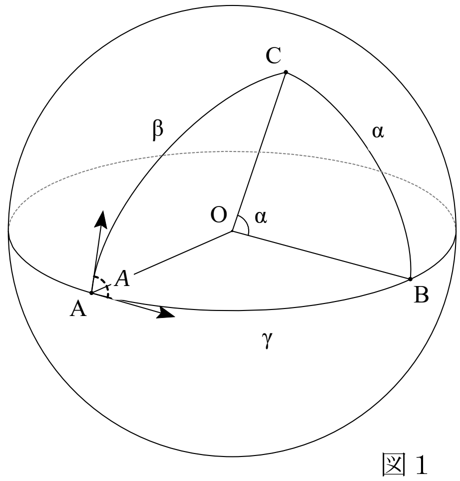

図１

［球面幾何学］（図１参照）

（０）半径１の球の中心を O とし，球面 O 上の点を考察する。

（１）球面上の２点 A,B に対して，２点 AB を通る大円を直線 AB とする。

（２）２直線 AB，AC のなす角は、２平面 OAB，OBC のなす角とする。これは，直線（大円）AB，AC の点 A における接線ベクトルのなす角に等しい。（∠BAC＝∠A＝A）

（注）球の半径が１であるから，∠BOC＝α より $\overset{\frown}{BC}=\alpha$ 。同様に $\overset{\frown}{CA}=\beta$, $\overset{\frown}{AB}=\gamma$,

つまり，角の大きさと，弧長は同じであることに注意。

球面直角三角形 ABC におけるピタゴラスの定理

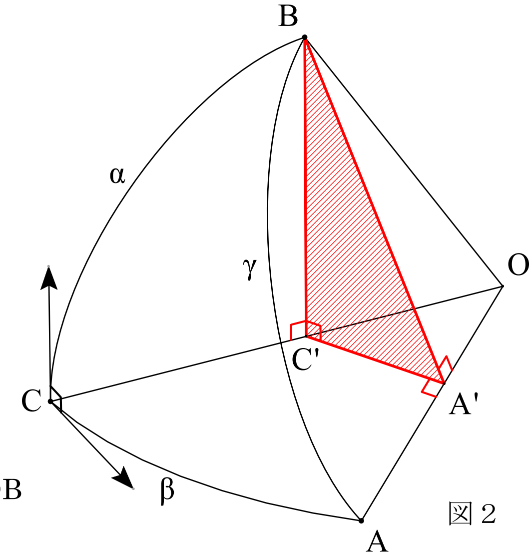

図２

図２の様な∠C = $C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 ABC を考える。

点 B から半径 OC に下ろした垂線の足を C’とし、点 C’から半径 OA に下ろした垂線の足を A’とする。

このとき，∠BC’A’=∠BA’O $=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

この図から，平面三角形 A’BC’をぬきだす。（図３）

また，この立体図を３つの扇形からできていると考え，半径 OB で切り開いた展開図をかく。（図４）

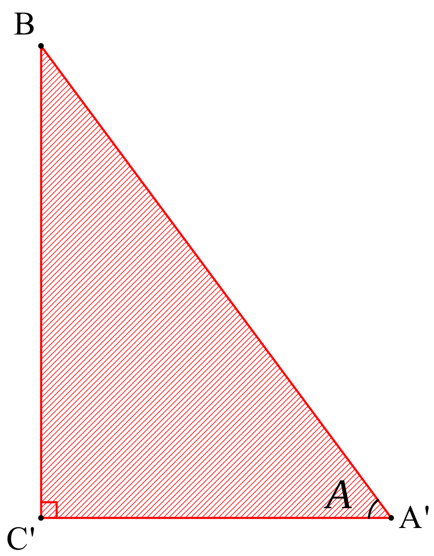

図３

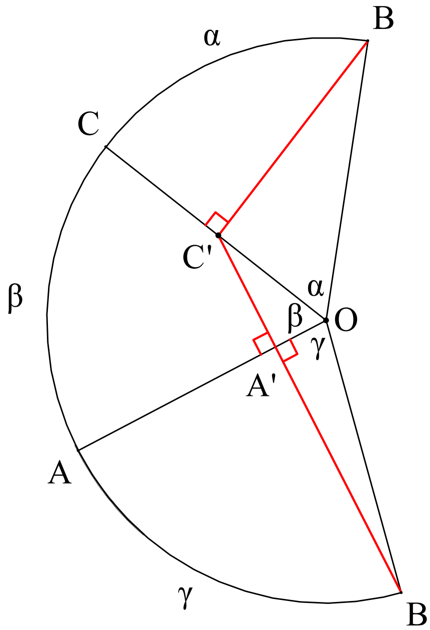

図４

球面直角三角形のピタゴラスの定理（$C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形 ABC について）

（A） $\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$

（B） $\sin\alpha=\sin A\sin\gamma$ ， $\sin\beta=\sin B\sin\gamma$

（C） $\cos A=\cos\alpha\sin B$ ， $\cos B=\cos\beta\sin A$

［証明］

（A）図４を参照

$$\cos\gamma=\mathrm{OA'}=\mathrm{OC'}\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta$$

（B）図３と図４を参照

$\sin A=\dfrac{BC'}{A'B}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ であるから， $\sin\alpha=\sin A\sin\gamma$ である。

同様に， $\sin\beta=\sin B\sin\gamma$

（C）図３と図４を参照し，（B）を適用する。

$$\cos A=\frac{A'C'}{A'B}=\frac{OC'\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\cos\alpha\sin B\sin\gamma}{\sin\lambda}=\cos\alpha\sin B$$

同様に，$\cos B=\cos\beta\sin A$ ［証明終わり］

（注意）球面三角形なので，直角がひとつとは限らないことに注意。

（一般の）球面三角形 ABC における正弦定理・余弦定理

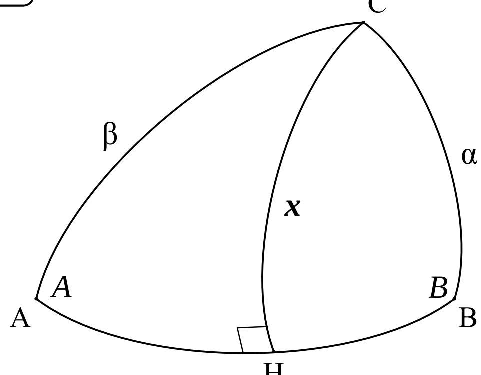

図５

正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$$

［証明］

点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろし，その長さ（弧長）CH を x とする。（図５参照）

２つの直角三角形 ACH と BCH において，ピタゴラスの定理（B）を適用すると，

$$\sin x=\sin A\sin\beta \ ,\ \sin x=\sin B\sin\alpha$$

であるので， $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}$ となる。

同様に， $\dfrac{\sin\beta}{\sin B}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$ であるから定理が成り立つ。 ［証明終わり］

余弦定理

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$
$$\cos\beta = \cos\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\beta\cos B$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C$$

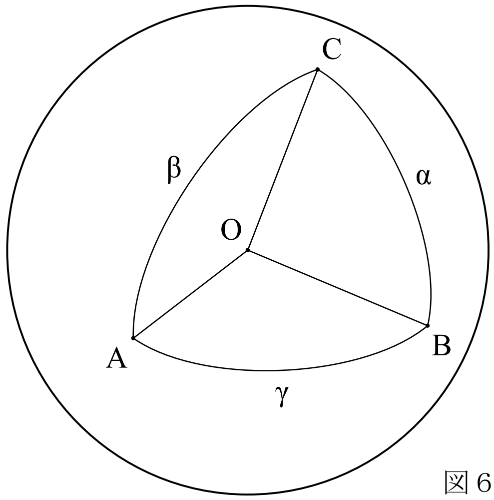

図 6

［証明］

一般の球面三角形 ABC（図 6 参照）を 3 次元座標空間の中で，原点を固定したまま回転移動することにより，点 A を z 軸上の点 $(0,0,1)$ に移動するとともに，点 B を xz 平面上に移動することができる。

補足

球面を回転移動するとは考えず，「この条件に合うように座標を決める」と考えても良い。

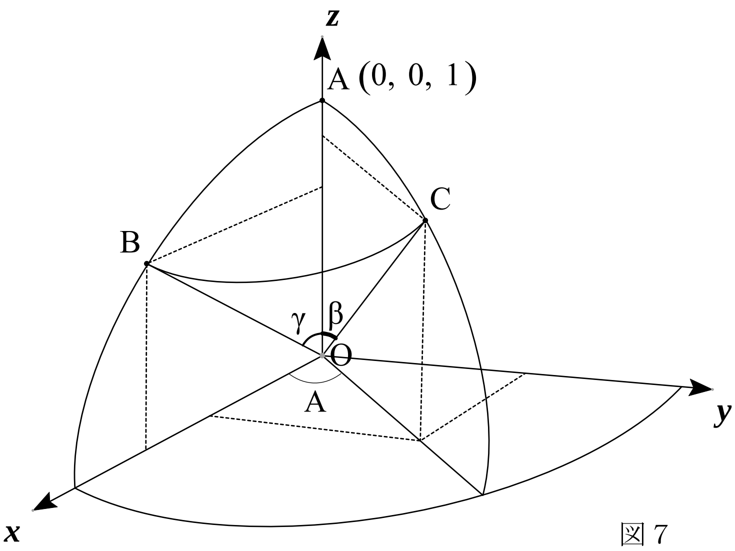

図 7

このとき，２点 B, C の座標は，

$$\mathrm{B}(\sin\gamma,\ 0,\ \cos\gamma)$$

$$\mathrm{C}(\sin\beta\cos A,\ \sin\beta\sin A,\ \cos\beta)$$

となる。

また，図 6 に明示してないが

$$\angle\mathrm{BOC} = \alpha$$

である。つまり，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角が α であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1\cdot 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \sin\gamma\sin\beta\cos A + 0 + \cos\gamma\cos\beta$$
$$= \sin\beta\sin\gamma\cos A + \cos\beta\cos\gamma$$

したがって，

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

を得る。同様に，他の２等式も成り立つ。

［証明終わり］

余弦定理の別証明

3次元のベクトルに関する，次の等式（公式）を知っている場合の証明について述べる。

(1)　$\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\bullet\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$　（3つのベクトルで張る平行6面体の体積）

(2)　$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\vec{c}$　（$\vec{b}$，$\vec{c}$ の一次結合）　(1)は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 右手系の時

補足　ベクトルを成分表示し計算すれば，証明可能。計算は，煩雑であるが・・・。

この(1)，(2)を利用して，次の等式(3)を示すことができる。

(3)
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \vec{c}\bullet\left\{\vec{d}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\}$$
$$= \vec{c}\bullet\left\{\left(\vec{d}\bullet\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{d}\bullet\vec{a}\right)\vec{b}\right\}$$
$$= \left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\left(\vec{b}\bullet\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\bullet\vec{d}\right)\left(\vec{b}\bullet\vec{c}\right)$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ をひとまとまりとして，(1)を適用

$\{\quad\}$ 内に，(2)を適用

内積の分配法則，アルファベット順整理

［別証明］

図6において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$ 等と略記する。

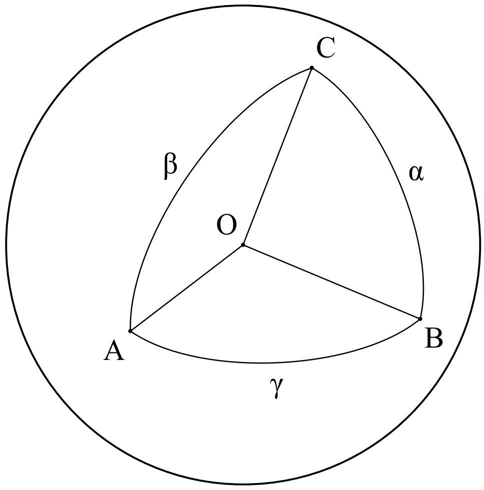

図6再

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 1\cdot 1\cdot\sin\gamma = \sin\gamma$，　$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right| = \sin\beta$

三角形 OAB と OAC の単位法線ベクトルはそれぞれ，

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\vec{a}\times\vec{c}}{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|} = \frac{\vec{a}\times\vec{c}}{\sin\beta}$$

である。また，この2つの単位法線ベクトルのなす角は A であるので，(3)を適用すると，

$$\cos A = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\sin\gamma}\bullet\frac{\vec{a}\times\vec{c}}{\sin\beta} = \frac{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\left(\vec{a}\bullet\vec{a}\right)\left(\vec{b}\bullet\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\left(\vec{b}\bullet\vec{a}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

これは，余弦定理である。　［証明終わり］

補足

2つの単位法線ベクトルの内積は、$\cos A$ そのものであるので，余弦定理は，等式(3)を単位法線ベクトルに適用しただけと考えられる。

ベクトルの公式 (1), (2) の証明　　　　付録

(1)　$\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\bullet\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = \vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$　(3 つのベクトルで張る平行 6 面体の体積 ※)

(2)　$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\vec{c}$　($\vec{b}$, $\vec{c}$ の一次結合)　((1) ※: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 右手系の時)

［証明］(1), (2) 共に，成分を計算すればよいのだが，一応すべて書いておこう。

(1)　$\vec{a}=\left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\vec{b}=\left(b_1, b_2, b_3\right)$, $\vec{c}=\left(c_1, c_2, c_3\right)$ とする。外積を計算し，

$$\vec{b}\times\vec{c}=\left(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1\right)$$

となり，次に内積を計算する。

$$\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=a_1\left(b_2c_3-b_3c_2\right)+a_2\left(b_3c_1-b_1c_3\right)+a_3\left(b_1c_2-b_2c_1\right)$$

$$=\left(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2\right)-\left(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2\right)$$

同様に計算し，

$$\vec{b}\bullet\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2\right)-\left(a_3b_2c_1+a_2b_1c_3+a_1b_3c_2\right)$$

(2)　右辺を計算し，左辺となることを示す。

$$(\text{左辺})=\left(\vec{a}\bullet\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\bullet\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$=\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)\left(b_1, b_2, b_3\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)\left(c_1, c_2, c_3\right)$$

$$=\Big(\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_1-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)c_1,$$

$$\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_2-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)c_2,$$

$$\left(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\right)b_3-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)c_3\Big)$$

$$=\Big(a_2\left(b_1c_2-b_2c_1\right)-a_3\left(b_3c_1-b_1c_3\right),$$

$$a_3\left(b_2c_3-b_3c_2\right)-a_1\left(b_1c_2-b_2c_1\right),\ a_1\left(b_3c_1-b_1c_3\right)-a_2\left(b_2c_3-b_3c_2\right)\Big)$$

$$=\left(a_1, a_2, a_3\right)\times\left(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1\right)$$

$$=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

［証明終わり］