正弦定理・余弦定理　簡単な証明

（１）正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$　　ただし，R は△ＡＢＣの外接円の半径

（２）第一余弦定理

$$a=b\cos C+c\cos B,\quad b=c\cos A+a\cos C,\quad c=a\cos B+b\cos A$$

（３）第二余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

［証明］

（１）△ＡＢＣの面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

この等式のすべての辺に，$\dfrac{2}{abc}$ を掛けると，

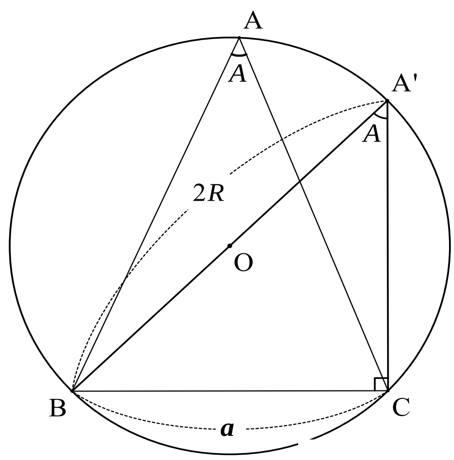
（１）の左側の逆数の関係を得る。

△ＡＢＣの頂角のどれかは，鋭角である。

それを∠Ａとする。（図１）の様に、直線ＢＯと外接円との交点をＡ’とする。△Ａ’ＢＣは直角三角形であるから，

$$a=2R\sin A$$

これで，（１）が示された。



（図１）

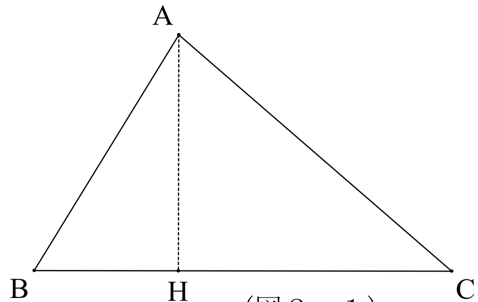
（２）鋭角三角形のとき，（図２－１）

$$a=\mathrm{BC}=\mathrm{CH}+\mathrm{BH}=b\cos C+c\cos B$$

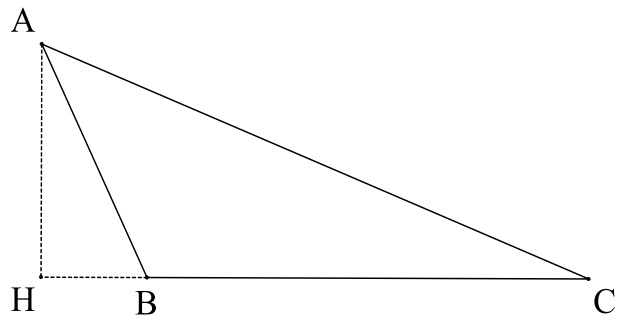
鈍角三角形の時、∠Ｂが鈍角とする，（図２－２）

$$a=\mathrm{BC}=\mathrm{CH}-\mathrm{BH}=b\cos C-c\cos(\pi-B)=b\cos C+c\cos B$$

が成り立つ。また，直角三角形でも成り立つ。



（図２－１）



（図２－２）

（３）（２）の結果より，

$$a^2=ab\cos C+ca\cos B \quad \cdots ①$$

$$b^2=bc\cos A+ab\cos C \quad \cdots ②$$

$$c^2=ca\cos B+bc\cos A \quad \cdots ③$$

これらより，①－②－③とすると，

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

したがって，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$