ピタゴラス数とグノモン（群）

愛知県立春日井東高等学校
堀部　和経

３辺の長さが３，４，５の三角形は，直角三角形です。ピタゴラス数とは，このように直角三角形の３辺の長さがすべて正の整数値である数の組のことです。そして，どの２つも互いに素であるような（既約）ピタゴラス数 x,y,z の求め方は分かっています。
そして，それらを整数倍すれば，全てのピタゴラス数を求められます。

> $x^2+y^2=z^2$ ，$(x,y)=1$，$(y,z)=1$，$(z,x)=1$，の正の整数解は，
> $\{x,y\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\}$ ，　$z=m^2+n^2$ 　である。
> 但し　$(m,n)=1$，$m>n$ ，m,n の一方は偶数で他方は奇数である。（偶奇は異なる）

ここでは，石ころを使ってピタゴラス数を見つけてみましょう。
右の図は，石を「グノモン」（逆さＬの字）の形に並べたモノです。左上から，グノモンで区切られた石の個数は順に

1　3　5　7　9・・・

となっています。これを見て，

$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$ ……①
$1+3+5+7+9=5^2$ …②

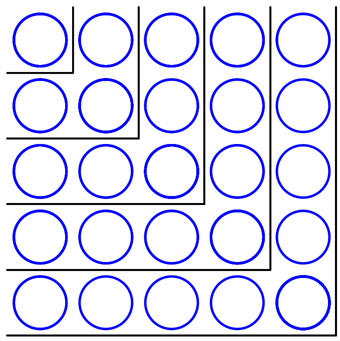
図１

となっているのが分かりますね。つまり，１から順に奇数を k 個たすと，k^2 となります。

つまり，$1+3+\cdots+(2k-3)+(2k-1)=k^2$ となります。

左上から，順に奇数個の石を並べていくと，いつも石は正方形の形になっているということです。このことから，奇数の列 1　3　5　7　9・・・は「四角数」と呼ばれています。

その四角数を少し別の見方をしてみると，また面白い性質が見えてきます。
上の式①，②を再度書いてみます。

$1+3+5+7=4^2$ ……①
$1+3+5+7+3^2=5^2$ …②

②の式の左辺の最後の項を，$9=3^2$ と書き直して，①の左辺を消去すると，

$4^2+3^2=5^2$

となり，ピタゴラスの定理を満たす整数解がひとつ分かります。（図２参照）

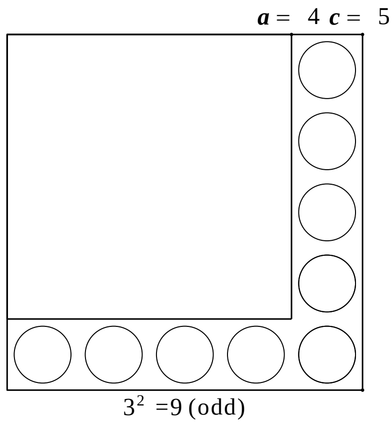

図２

次に，最後の項の9を25に変えた式を書いてみましょう。（図３参照）

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+23=12^2 \quad \cdots\cdots ③$$

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+23+25=13^2 \quad \cdots ④$$

となり， $25=5^2$ なので，③，④より，

$$5^2+12^2=13^2$$

を得る。以下同様に，

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+47=24^2$$

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+47+49=25^2$$

から，

$$7^2+24^2=25^2$$

を得る。

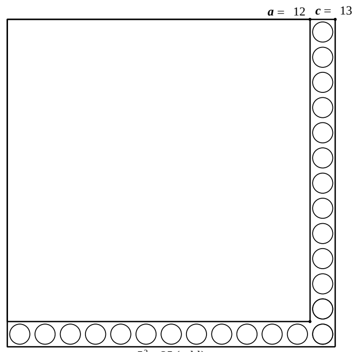

図３

この操作は限りなく続けられ，一般の $N=2n-1 \ \ (n \geq 2)$ に対して，

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+(N^2-2)=\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2 \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$1+3+\cdot\cdot\cdot+(N^2-2)+N^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2 \quad \cdots ⑥$$

なので， $N^2+\left(\frac{N^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{N^2+1}{2}\right)^2$ となり，ピタゴラス数を見つけることができた。

全ての $N=2n-1 \ \ (n \geq 2)$ に対して， $\frac{N^2-1}{2},\frac{N^2+1}{2}$ の差が１なので，互いに素であり，このピタゴラス数は全て異なる。

具体的に，資料１の一番上の斜めの列となっていることが確認できますね。

ところで，今見てきたように逆Ｌ字形のグノモンを１列加えることで，ある種のピタゴラス数の列を見つけられました。このアイデアを発展させて見ましょう。

n列のグノモン群

複数列のグノモンを考え，それらを加えるというアイデアでも，ピタゴラス数を見つけられる。

例えば，図４では２列のグノモンの和が， $7+9=16=4^2$ であることから，

$$3^2+4^2=5^2$$

を見つけられる。（複数列のグノモンをグノモン群と呼ぶ）

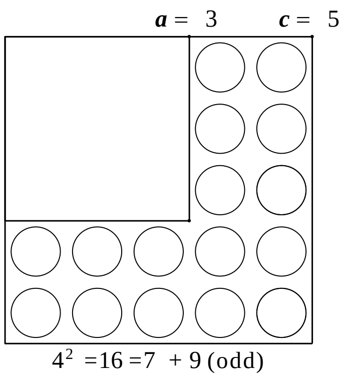

図４

ピタゴラス数$(3,4,5)$，$(4,3,5)$を２倍したピタゴラス数$(6,8,10)$，$(8,6,10)$も図５，６のようにそれぞれ２列，４列のグノモン群を加えるという図から，ピタゴラス数が求められる。

具体的に確認してみると，

$$13+15+17+19=64=8^2$$

$$17+19=36=6^2$$

となり，確かに成り立っている。

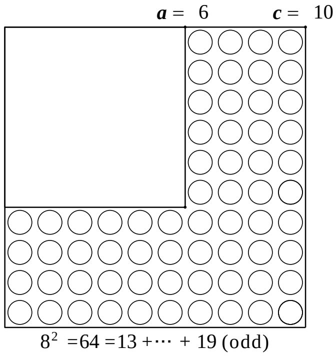

図５

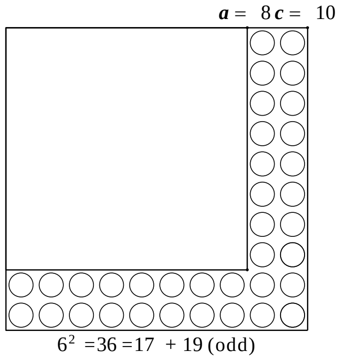

図６

また, 図７, ８は, ピタゴラス数$(5,12,13)$, $(12,5,13)$を表す複数列（１列も含む）のグノモン群を加えるピタゴラス数を求める図になっている。

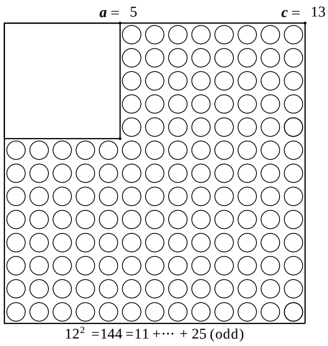

図７

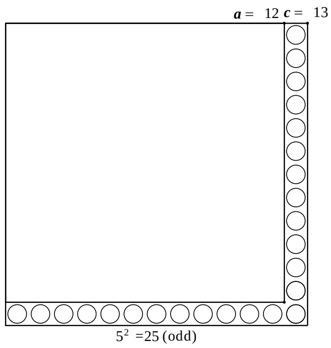

図８

このように連続する複数列のグノモンの和が平方数になる場合を考え，グノモン群の石の個数を加える考え「グノモン群の和」だけで、ピタゴラス数を求められるか。

つまり，このアイデアだけで，全てのピタゴラス数が表せるだろうか。（？）

定理１

３以上の全ての正整数xに対して，$x^2+y^2=z^2$を満たす正整数y,zが存在する。

［証明］（ア）xが奇数の時、$y=\dfrac{x^2-1}{2}$ ，$z=\dfrac{x^2+1}{2}$ とおけばよい。y,zとも正整数である。

$$z^2-y^2=\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^2=\frac{x^4+2x^2+1}{4}-\frac{x^4-2x^2+1}{4}=x^2$$

（イ）xが偶数の時、$y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-1$, $z=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1$ とおけばよい。y,zとも正整数である。

$$z^2-y^2=\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right\}^2-\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1\right\}^2=\frac{x^4+8x^2+16}{16}-\frac{x^4-8x^2+16}{16}=x^2$$

［証明終わり］

定理２

任意のピタゴラス数(x, y, z)に対して，それを表す「グノモン群の和」の図が描ける。

［証明］

今，$x^2+y^2=z^2$を満たす正整数x, y, zを考える。

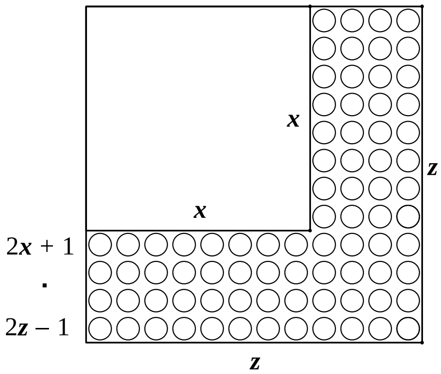

図９

$$y^2=z^2-x^2$$

$$=\sum_{k=1}^{z}(2k-1)-\sum_{k=1}^{x}(2k-1)$$

$$=\sum_{k=x+1}^{z}(2k-1)$$

$$=(2x+1)+\cdots\cdots+(2z-1)$$

ピタゴラス数が存在すれば，その関係を満たす形になるグノモン群の和の図が描ける。

［証明終わり］

系３

(x, y, z)に対する「グノモン群の和」の図が描けるなら、(y, x, z)に対する図も描ける。

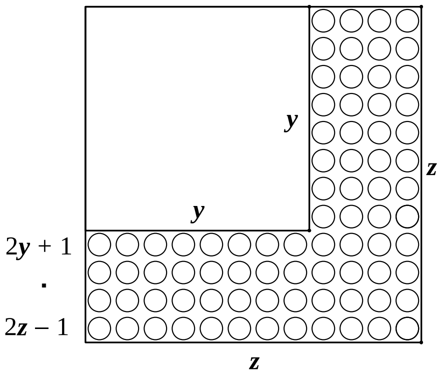

図１０

以上から，

３以上の任意の正整数xに対して，ピタゴラス数(x, y, z)に対する「グノモン群の和」の図が描ける。　（図９，１０参照）

資料１

	1	2	3	4	5	6	7	8
2	3 4 5							
3		5 12 13						
4	15 8 17		7 24 25					
5		21 20 29		9 40 41				
6	35 12 37				11 60 61			
7		45 28 53		33 56 65		13 84 85		
8	63 16 65		55 48 73		39 80 89		15 112 113	
9		77 36 85		65 72 97				17 144 145
10	99 20 101		91 60 109				51 140 149	
11		117 44 125		105 88 137		85 132 157		57 176 185
12	143 24 145				119 120 169		95 168 193	
13		165 52 173		153 104 185		133 156 205		105 208 233
14	195 28 197		187 84 205		171 140 221			
15		221 60 229		209 120 241				161 240 289
16	255 32 257		247 96 265		231 160 281		207 224 305	

	9	10	11	12	13	14	15	16
10	19 180 181							
11		21 220 221						
12			23 264 265					
13		69 260 269		25 312 313				
14	115 252 277		75 308 317		27 364 365			
15						29 420 421		
16	175 288 337		135 352 377		87 416 425		31 480 481	

縦$=m$，横$=n$，各セル$\{x,y\}=\{m^2-n^2,\ 2mn\}$；$z=m^2+n^2$

資料２

全ピタゴラス数の表　　$\{x, y\} = \left\{ k\left(m^2 - n^2\right), 2kmn \right\}; z = k\left(m^2 + n^2\right)$

但し$\left(m, n\right) = 1$，$m > n > 0$，m, nの一方は偶数で他方は奇数である。$k \in N$

k= 1　n

m	1	2	3	4	5	6	7
2	3 4 5						
3		5 12 13					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

k= 2　n

m	1	2	3	4	5	6	7
2	6 8 10						
3		10 24 26					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

k= 3　n

m	1	2
2	9 12 15	
3		15 36 39
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

k= 4　n

m	1	2	3	4	5	6
2	12 16 20					
3		20 48 52				
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

k= 5　n

m	1	2	3	4	5	6
2	15 20 25					
3		25 60 65				
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

k= 6　n

m	1	2	3	4	5
2	18 24 30				
3		30 72 78			
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					

k= 7　n

m	1	2	3	4	5
2	21 28 35				
3		35 84 91			
4	105 56 119		49 168 175		
5		147 140 203		63 280 287	
6	245 84 259				77 420
7		315 196 371		231 392 455	
8	441 112 455		385 336 511		273 560
9		539 252 595		455 504 679	