2018/05/27 堀部　和経

図１

**球面三角形の定理**　　 高校生に向けて

［球面幾何学］（図１参照）

（０）半径1の球の中心をOとし，球面O上の点を考察する。

（１）球面上の２点A,Bに対して，２点ABを通る大円を直線

ABとする。

（２）２直線AB，ACのなす角は、２平面OAB，OBCのなす角

とする。これは，直線（大円）AB，ACの点Aにおける接線ベ

クトルのなす角に等しい。（∠BAC＝∠A = *A*）

（注）球の半径が1であるから，∠BOCより。同様に，

図２

つまり，角の大きさと，弧長は同じであることに注意。

球面直角三角形ABCにおけるピタゴラスの定理

図２の様な∠C = *C* =の直角三角形ABCを考える。

点Bから半径OCに下ろした垂線の足をC’とし、点C’から

半径OAに下ろした垂線の足をA’とする。

このとき，∠BC’A’=∠BA’O =となる。

この図から，平面三角形A’BC’をぬきだす。（図３）

また，この立体図を３つの扇形からできていると考え，半径OB

で切り開いた展開図をかく。（図４）

図４

図３

球面直角三角形のピタゴラスの定理（の直角三角形ABCについて）

（Ａ）

（Ｂ） ，

（Ｃ） ，

［証明］

（Ａ）図４を参照

 

（Ｂ）図３と図４を参照

  であるから， である。

　　同様に，

（Ｃ）図３と図４を参照し，（Ｂ）を適用する。

 

　　同様に，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［証明終わり］

（注意）球面三角形なので，直角がひとつとは限らないことに注意。

（一般の）**球面三角形ABCにおける正弦定理・余弦定理**

図５

正弦定理



［証明］

　点Cから直線ABに垂線CHを下ろし，その長さ

（弧長）CHをとする。（図５参照）

　２つの直角三角形ACHとBCHにおいて，ピタゴラスの定理（Ｂ）を適用すると，

  ，

であるので，となる。

同様に，であるから定理が成り立つ。　　　　　　　　　　　　［証明終わり］

図６

余弦定理







［証明］

一般の球面三角形ABC（図6参照）を3次元座標空間の中で，原点を固定したまま回転移動することにより，点Aを軸上の点 に移動するとともに，点Bを平面上に移動することができる。

補足

　球面を回転移動するとは考えず，「この条件に合うように座標を決める」と考えても良い。

図７

このとき，２点B, Cの座標は，

 B

C

となる。

また，図６に明示してないが

∠BOC

である。つまり，とのなす角がである

から，

 





したがって，



を得る。同様に，他の２等式も成り立つ。

　　　　　　　　　　　　　　　　　　［証明終わり］

余弦定理の別証明

３次元のベクトルに関する，次の等式（公式）を知っている場合の証明について述べる。

　 (1)　 （3つのベクトルで張る平行6面体の体積）

(2)　　（の一次結合）　(1)は右手系の時

補足　ベクトルを成分表示し計算すれば，証明可能。計算は，煩雑であるが・・・。

この(1)，(2)を利用して，次の等式(3)を示すことができる。

(3)　

をひとまとまりとして，(1)を適用

 内に，(2)を適用

内積の分配法則，アルファベット順整理



 　　　

［別証明］

図６再

　図６において，等と略記する。

　，　

三角形OABとOACの単位法線ベクトルはそれぞれ，

 



である。また，この2つの単位法線ベクトルのなす角はであるので，(3)を適用すると，

 



　これは，余弦定理である。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［証明終わり］

補足

２つの単位法線ベクトルの内積は、そのものであるので，余弦定理は，等式(3)を単位法線ベクトルに適用しただけと考えられる。

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　 　　　　　付録

ベクトルの公式 (1), (2) の証明

 (1)　 （3つのベクトルで張る平行6面体の体積 ※）

(2)　　 （の一次結合） ( (1) ※:右手系の時 )

［証明］(1), (2) 共に，成分を計算すればよいのだが，一応すべて書いておこう。

(1) とする。外積を計算し，



となり，次に内積を計算する。





同様に計算し，



(2) 右辺を計算し，左辺となることを示す。

 （左辺）













=



　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［証明終わり］