（Ａ）半径１の円に内接する正角形の辺および対角線の異なる長さの平方の和を求めよ。

【準備】について，具体的に計算してみよう。

◎正二角形の話題を持ち出すことに疑問があると思いますが・・・計算だけしてみよう。

◎正七角形，正九角形の計算は，パスすることにします。

［Hint］円の中心をＯとする。△に余弦定理



を用いるとよい。を使うとよい。

（　　よって，）



　　よって，

　，　よって，

　，　よって，

　，，　よって，

　パス

　，，，よって，

　パス

【Ａ問題（予想）】半径１の円に内接する正角形の辺および対角線の異なる長さの平方の和は



と予想できる。このことを証明するために，次の補助定理を示す。

|  |
| --- |
| 【補助定理１】　図のように単位円周上に個の点が  等間隔で並んでいるとき，単位円周上の任意の点に対して，    が成り立つ。  【証明】個の点の位置ベクトルを と表す。    　　【証明終わり】 |

【Ａ問題の証明】



（ア）が奇数の時，



（イ）が偶数の時，とする。

　　　　　　　　【証明終わり】

　※　この証明は，ベクトルを利用しているが，複素数の利用や，座標の計算でも本質的には，同じ証明が書ける。

　　例えば，上に等間隔に存在する個の複素数と上の任意の複素数に対して，





面倒な表示になるが直接座標を利用し，等間隔に存在する個の点を一般性を失さないで，



と表しても証明できる。

［問題］　「数学オリンピックチャンピオンの美しい解き方」テレンス・タオ　著・寺嶋英志　訳　より

（Ｂ）半径１の円に内接する正多角形の辺及び対角線全ての長さの平方の和を求めよ。

【Ｂ解答】



【補助定理２】　単位球面にある円周上に個の点が，

を満たすように並んでいる。このとき，同じ単位球面上の任意の点に対して，



が成り立つ。

【証明】　補助定理１の証明を，この個の点に適用すれば良い。　　【証明終わり】

（Ｃ）半径１の球に内接する正面体のすべての頂点間の距離の平方の和を求めよ。

【解答】　単位球に内接する正多面体は，中心Ｏに関して対称な２点が存在している。その２点を，とすれば，である。よって，全て頂点のベクトルの和はである。

よって，「頂点数の平方」となる。

正多面体のの値を一覧表にする。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 単位球面に内接する正多面体のの値一覧表 | | | | | |
| 正多面体名 | 面数 | 辺数 | 頂点数 |  | 備考 |
| 正４面体 | ４ | ６ | ４ | １６ |  |
| 正六面体 | ６ | １２ | ８ | ６４ |  |
| 正八面体 | ８ | １２ | ６ | ３６ |  |
| 正十二面体 | １２ | ３０ | ２０ | ４００ |  |
| 正二十面体 | ２０ | ３０ | １２ | １４４ |  |

［問題］　参考：日本数学オリンピックの問題より