**サイクロイドの長さ・面積**　―――　微分積分学以前　―――

堀部　和経

§０　はじめに

　思い起こすと私が高校生の時，数学を教えていただいた河合先生に「微積を学ぶと，サイクロイドの面積や長さも計算出来るようになる」と教えられ，私自身も生徒に何年もの間、同じように教えてきました。

しかし，少し歴史を調べてみると，人類がサイクロイドの長さや面積を知識として知っている時期と微分積分学の萌芽の時期が前後していることに気がつきました。「これはどういうことか？」，「おかしいじゃないか？」と思い，その当時のアイデアを高校生が読めるようにとまとめました。

図１

§１　微分積分を使って

（１）サイクロイドの説明

サイクロイドを簡単に解説しよう。

図１のように，自転車が平坦な道（地面）をまっすぐ進んでいる様なとき，タイヤの外周の１点Ｐが描く軌跡をサイクロイドという。

図２

（２）デカルト座標による表現

計算を簡単にするため自転車のタイヤの半径を１としよう。

点Ｐが道（地面）に接している点を原点にし，図２のように座標軸をとる。点Ａは自転車の車軸の中心，点Ｂは点Ａから道（地面）に降ろした垂線の足とする。また，点ＨをＰＨ⊥ＡＢとなるように直線ＡＢ上にとる。

ここで，∠ＰＡＢとすると，明らかに



したがって，ＰＨ，ＡＨであるから，点Ｐとすると，

Ｐ （但し）

となる。

（３）サイクロイドの長さ

　自転車が走り続ければ長さは確定しないので，タイヤが１回転する分の長さを計算してみよう。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

，



ところで，よりとなることから，である。したがって，



つまり、サイクロイドの長さはとなる。

これは「あまりに美しい値」とは感じませんか。

（４）サイクロイドの面積

タイヤが１回転する分のサイクロイドと道（地面）の間の面積を計算してみよう。





図３





これも「あまりに美しい値」とは感じませんか。

サイクロイドと地面の間の面積ですね。円（タイヤ）の面積のちょうど３倍ですね。（図３）

§２　微分積分以前

図４

微積分学の成立以前にもサイクロイド(Cycloid)の長さや面積は知られていた。その長さや面積はどのようにして計算されていたかを解説する。

（５）サイクロイドの長さ

端的に説明すれば，サイクロイドの縮閉線（エボリュート，evolute）は，サイクロイドになる。したがって，サイクロイドの伸開線（インボリュート，involute）もサイクロイドであることから，伸開する糸の長さが４であるので，サイクロイドの長さは、その倍の８である。

図４で言えば，したがってとなる。

　ただ，この説明では多くの高校生が，「何のことか分からない」と言うであろう。

もうすこし少し丁寧な説明をしよう。

　図５の中の下の２つの曲線は２つのサイクロイドである。自転車で説明すると、タイヤ２周分のサイクロイドと思って欲しい。

図５

４

その丁度真ん中の点Ｂに糸の端を固定し，左のサイクロイドの頂点Ａまでサイクロイドに沿わせながら、糸を張る。

端点Ａから点Ａを通って点Ｃまで糸をにピンと張りつつ移動させる。注意することは、糸とサイクロイドの接点Ｔから点Ｂまではサイクロイドに沿わせることである。このように点Ａを動かしていくと美しい曲線を描く。図５では，弧のことである。これが２つのサイクロイドと合同になる。つまり，この図の中の３つのサイクロイドはすべて合同である。

さて，最初に張った糸の長さつまり弧は，サイクロイド長さの半分である。したがって，サイクロイドの長さは，糸の長さの２倍である。この事から，糸の長さを求めれば良い。

点Ａがサイクロイドの頂点Ｃと一致した時を考えれば，糸の長さは，であり，はタイヤの直径２つ分，つまり糸の長さは４であるので，サイクロイドの長さは８と分かる。

（６）サイクロイドの面積

図６

図７

　図６のサイクロイドは，今までと同じものでタイヤを２周した部分を描いている。図７は天井に張り付いたタイヤが天井を滑らないように回転した時にできる軌跡としてのサイクロイドです。

図８は，この２つのサイクロイドを重ねて描いたものである。そして，図９は図８の左端を拡大したものである。

図９

図８

サイクロイド上の点Ｐから，軸に平行な直径に下ろした垂線の足をＨとする。このとき，点Ｈは，２点Ｐ，Ｑの中点である。

このことから，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，長方形ＯＢＡＣの中心点に関して点対称な曲線となっている。

点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）長方形ＯＢＡＣの面積を二等分している。長方形ＯＢＡＣの縦，横の辺の長さはそれぞれ２，である。長方形ＯＢＡＣであることから，点Ｈの軌跡と折れ線ＯＢＡで囲まれた部分の面積はとなる。

ところで，点Ｈの軌跡（曲線Ｏ－Ｈ－Ａ）は，随伴線，コンパニオン（Companion）と呼ばれている。

図１０

円（タイヤ）１回転分の随伴線と軸で囲まれた部分の面積はである。

　最後に，サイクロイドと随伴線の間の面積について，左側と右側に分けて考えて見よう。

　まず左側は、タイヤの回転位置のすべてにおいて，すべての垂線ＰＨの長さは，円周から直径に降ろしたすべての垂線の長さに等しい。したがって，左側の面積の差は半円の面積に等しい。右側も同様なので，左右合計でとなる。

　したがって，サイクロイドと軸の間の面積は，となる。

図１１

　このアイデアは，ローベルバル（１６０２－１６７５）によるものである。（１６３７年頃）

§３　まとめ

「いま学んだ微分積分で計算しても，以前から知っているサイクロイドの面積や体積の値について、間違い無く計算出来ますね」ということです。