

四面体の四平方の定理等

右の直角三角形OABでは，

ABOAOB

であり，∠AOBである三角形OABならば，

 ABOAOBOA･OB･

であった。

**［四平方の定理］**

　さて，頂点Ｏに集まる角がすべて90°となっている四面体OABCを考える。このとき，

△ABC△OAB△OBC△OCA

である。

［証明］　右の図のように４点O,A,B,Cの座標を定める。

いま，としてよい。すると，

△OAB

△OBC

△OCA

となる。次に△ABCの面積を求める。

 ，

となるので，

 

したがって，

　　　　△ABC

よって，

　 △ABC

 

△OAB△OBC△OCA

［証明終り］

［参考文献］　幾何学大事典　２巻　P150 ［123］ Descartes, Gua

**［余弦定理］**

ここまでは，頂角に集まる３つの角がすべて直角の場合を考えてきました。この「直角」という条件を外したらどうなるのか，つまり一般の四面体OABCについて考えることにします。

その前に，３次元のベクトルの外積 ”” などに関係する等式を簡単に確認します。

◎　 とする。

 ，　，　

，　，　

◎　の図形的意味

の向きは，からへベクトルを

回転させるとき，右ネジの進む向きと同じ。

その長さは，とで張られる平行四辺形の面積Sと同じである。＝S





**四面体の余弦定理**

四面体OABCに対して，

△ABC△OBC△OCA △OAB

 △OCA･△OAB･

△OAB･△OBC･

△OBC･△OCA･

但し，角は，次の面角である。

　は△OCAと△OABとのなす角であり，四面体の内側を測る。

同様に，は△OABと△OBCとのなす角，は△OBCと△OCAとのなす角である。

【角の説明図：点O側からもう１つの点が重なって見える位置から見た概念図】

［証明］

 △ABC

であるから，

△ABC







△OAB△OBC△OCA

さて，

 

（但し，はベクトルのなす角である。）

△OCAの法線ベクトルはと平行であり，△OABの

法線ベクトルはと平行である。このことから，

 

である。（面角の定義から，角は四面体の内側を測る。）

 



△OCA･△OAB･

同様に，

△OAB･△OBC･

△OBC･△OCA･　　　　　　　　　　　［証明終わり］

【補足】頂点Oに集まる３つの角がすべて直角である四面体は，であるから，

△ABC△OAB△OBC△OCA

となることは，この証明からも明らかである。

堀部 和経 2018/1/15

※　この余弦定理，キレイですね。きっと誰か解いていますよね。知ってますか？ 教えて！

と書きましたが、・・・。一般の次元空間での余弦定理がありました。1/28