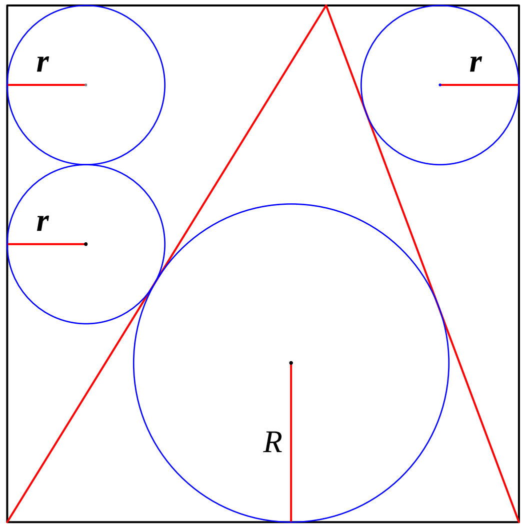
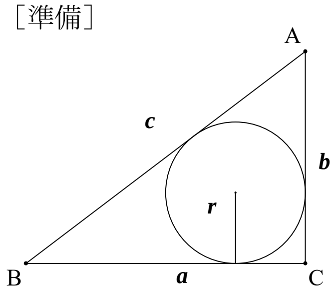
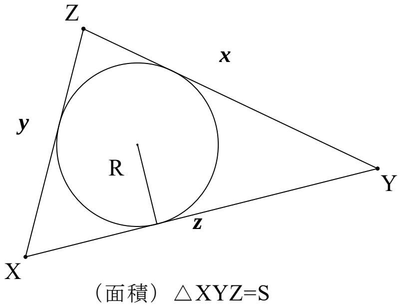
正方形の内部に，図のように三角形と半径 r の小円３個および，半径 R の大円が接しているとする．
このとき，比 $r:R$ を求めよ．
「長岡市上岩井　根立寺　の　算額より」



［準備］





（面積）△XYZ=S

三角形とその内接円について，

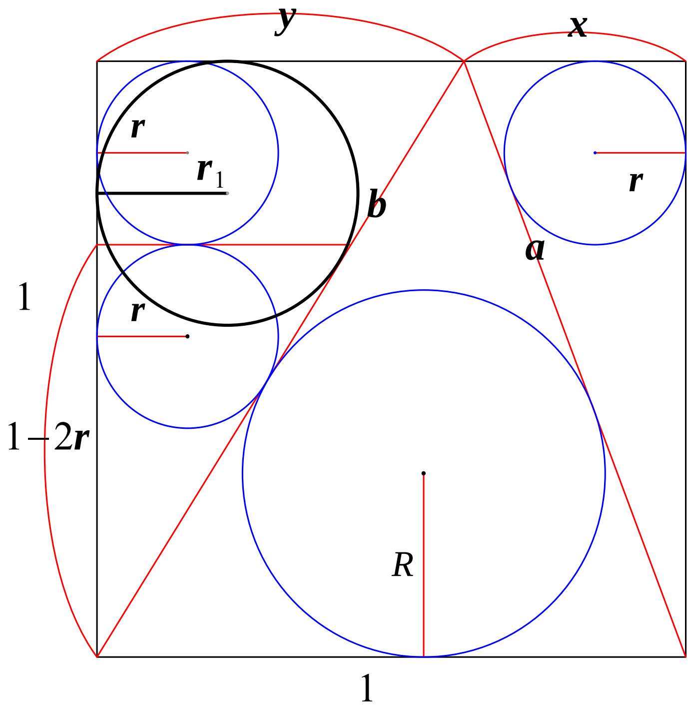
$$2r=a+b-c=a+b-\sqrt{a^2+b^2}\quad\cdot\cdot\cdot\text{（A）}\quad,\quad \mathrm{S}=R\cdot s\quad\left(s=\frac{x+y+z}{2}\right)\cdot\cdot\cdot\text{（B）}$$

である．

［証明］$r:R=1:2$ であることを示す．

正方形の１辺の長さを1とし，右の図のように，線分の長さを決める．

まず, 右の直角三角形に対して（A）を適用し，



$$2r=1+\sqrt{a^2-1}-a$$

$$a^2-1=(a-1+2r)^2$$

$$a^2-1=a^2+1+4r^2-2a+4ar-4r$$

$$2a(1-r)=2-4r+4r^2$$

$$a=\frac{1-2r+2r^2}{1-2r}=1+\frac{2r^2}{1-2r}$$

次に，左の直角三角形の内接円の半径を r_1 とする．左にある２つの直角三角形の相似比を考えると，

$r_1=\dfrac{r}{1-2r}$ であり，同様に上の結果を使うと，$b=1+\dfrac{2{r_1}^2}{1-2r_1}$ となるので，これらより，

$$b=1+\frac{\dfrac{2r^2}{(1-2r)^2}}{1-\dfrac{2r}{1-2r}}=1+\frac{2r^2}{(1-2r)^2-2r(1-2r)}=1+\frac{2r^2}{(1-2r)(1-4r)}$$

となる．

中央の三角形の３辺の長さは$a, b, 1$，面積は$\dfrac{1}{2}$である．（B）を利用し，$\dfrac{1}{2}=R\cdot\dfrac{a+b+1}{2}$．つまり，

$$\frac{1}{R}=a+b+1$$

したがって，比の値$\dfrac{r}{R}=\left(a+b+1\right)r$を計算すればよい．

$$\frac{r}{R}=\left\{\left(1+\frac{2r^2}{1-2r}\right)+\left(1+\frac{2r^2}{(1-2r)(1-4r)}\right)+1\right\}r=3r+\frac{2r^2\{(1-4r)+1\}}{(1-2r)(1-4r)}=3r+\frac{4r^2}{1-4r}$$

ところで，右の直角三角形に対して（A）を適用する．･･･ $\boxed{\text{（注意）今回は}\ x\ \text{を利用する}}$

$$2r=1+x-\sqrt{x^2+1} \qquad \Rightarrow \qquad x^2+1=\left(x+1-2r\right)^2 \qquad \Rightarrow$$

$$0=4r^2+2x-4xr-4r \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{2r(1-r)}{1-2r}$$

左の直角三角形で考える．上と同様に，$r_1=\dfrac{r}{1-2r}$であり，$y=\dfrac{2r_1(1-r_1)}{1-2r_1}$となるので，これらより，

$$y=\frac{\dfrac{2r}{1-2r}\left(1-\dfrac{r}{1-2r}\right)}{1-\dfrac{2r}{1-2r}}=\frac{2r\{(1-2r)-r\}}{(1-2r)^2-2r(1-2r)}=\frac{2r(1-3r)}{(1-2r)(1-4r)}$$

正方形の１辺は，１であるので，$x+y=1$であるから，

$$\frac{2r(1-r)}{1-2r}+\frac{2r(1-3r)}{(1-2r)(1-4r)}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2r\{(1-r)(1-4r)+(1-3r)\}}{1-4r}=1-2r \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{2r\left(2-8r+4r^2\right)}{1-4r}=1-2r \qquad \Rightarrow \qquad 4r+\frac{8r^3}{1-4r}=1-2r \qquad \Rightarrow \qquad 3r+\frac{4r^3}{1-4r}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}$となる．

よって，$r:R=1:2$を得る．

［証明終わり］

HORIBE Kazunori

堀部　和経

2018/08/29

参考事項・「口伝」深川英俊氏

・「和算の館」小寺裕氏

［　算額写真・右側の問題　］