広中先生・高校生時代の思い出の問題

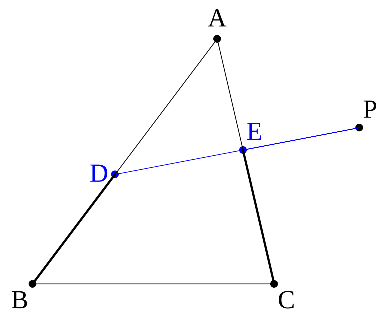
広中平祐著「学問の発見」佼成出版社（63～64）にある問題

問題

△ＡＢＣと点Ｐがある。Ｐを通って直線を引き、ＡＢ，ＡＣとそれぞれＤ，Ｅで交わり、ＢＤ＝ＣＥとせよ。

＜ヒント＞

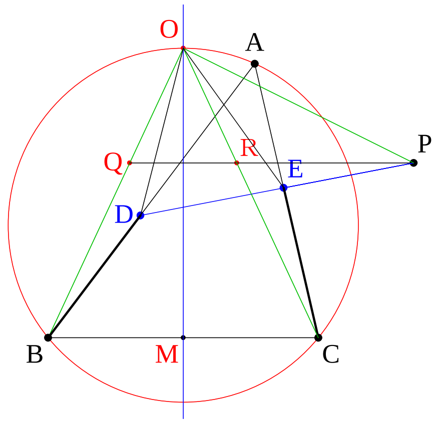
同一平面上の等長線分ＢＤ，ＣＥの回転中心は定点である。



あるＭＬ（メーリングリスト）で、この問題についての質問があった。このＭＬを読んで（２００７年夏）、この問題の存在を知った。とてもおもしろい問題であったので回答（解答）を考えた。

回答（解答）

２つの線分ＢＤ、ＣＥの長さが等しい。また、三角形の２辺上にあることから平行ではない。よって、回転移動で点Ｂを点Ｃに、同時に点Ｄを点Ｅに重ねる移動が存在する。その回転の中心を点Ｏとする。



まず、点Ｏの位置を決定する。

△ＯＢＤ≡△ＯＣＥである。よって、ＯＢ＝ＯＣより、点Ｏは線分ＢＣの垂直二等分線上にある。また、

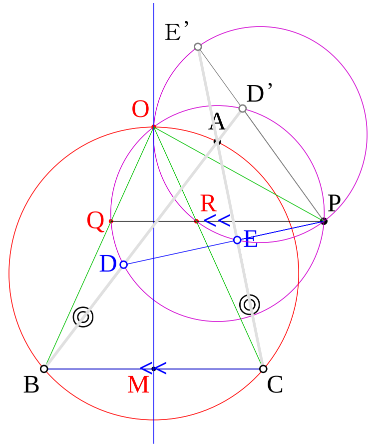
$$\angle \mathrm{BOC}=\pi-(\mathrm{B}+\beta)-(\mathrm{C}-\beta)=\pi-\mathrm{B}-\mathrm{C}=\mathrm{A}$$

よって、点Ｏは、△ＡＢＣの外接円上にある。

次に、点Ｄおよび点Ｅの位置を定めよう。

点Ｐを通り直線ＢＣと平行な直線をｌとする。直線ｌと直線ＯＢとの交点をＱ、直線ＡＣとの交点をＲとする。

△ＯＰＱの外接円と直線ＯＢとの交点を図のようにＤ（Ｄ'）とする。また、△ＯＰＲの外接円と直線ＯＣとの交点を図のようにＥ（Ｅ'）とする。



このとき、点Ｐと２点Ｄ，Ｅ（Ｄ'またはＥ'）を結ぶ直線が求める直線である。

※　注意、点Ｄ（Ｄ'），Ｅ（Ｅ'）が存在しないとき直線は存在しない。

さて、以下３点Ｐ，Ｄ，Ｅが同一直線上にある事を確認しよう。

まず、

∠ＯＤＰ＝∠ＯＱＰ＝∠ＯＢＣ＝∠ＯＣＢ

∠ＯＥＰ＝∠ＯＲＰ＝∠ＯＣＸ

さて、△ＯＤＥ（相似）△ＯＢＣであるから、

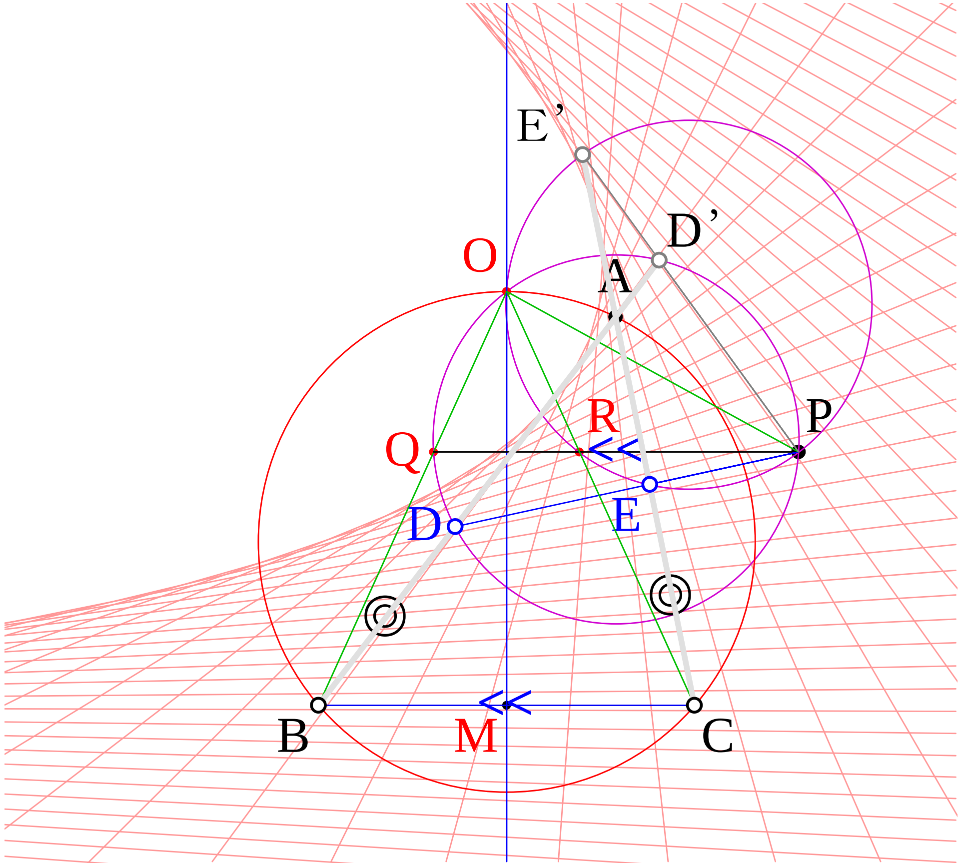
∠ＯＥＤ＋∠ＯＥＰ＝∠ＯＤＥ＋∠ＯＥＰ＝∠ＯＣＢ＋∠ＯＣＸ＝π

よって、３点Ｐ，Ｄ，Ｅは同一直線上にある。

回答は以上（証終）

（付録１）

※　△ＡＢＣと点Ｐの配置条件によって、そのような直線が存在しない。つまり、点Ｄ，Ｅをとることができない場合がある。



上図の薄い色で表された直線群は、ＢＤ＝ＣＥ（＝ t ）の条件を保って直線ＤＥを表示したものである。（ t を一定のピッチ動かしてかいたもの）

図の条件の下では、点Ｄ，Ｅの組が２組存在することが理解されるであろう。図の薄い色で表された直線群の包絡線は放物線であるが、その放物線の内側（焦点のある側）に、点Ｐがあれば、点Ｄ，Ｅは存在しない。

（付録２）

※　一般に、２つの直線上を等速で動く２点を結ぶ直線群の包絡線は、放物線となる。　**（特殊な初期条件を設定すれば、その限りではないのだが…。）**

ということで、以下これを証明する。

Affine（アフィン）変換で放物線は放物線になる。したがって、２直線を $y=x, y=-x$ とし、その上の動点を $D(t,t)$，$E(t-a,-(t-a))\ (a\neq 0)$ とおいて証明すればよい。

ベクトル $DE=(-a,a-2t)$ に垂直なベクトルの１つは、$(a-2t,a)$ であるので、直線 DE の方程式は、

$$(a-2t)(x-t)+a(y-t)=0$$

であり、整理すると、

$$2t^2+2(x+a)t-a(x+y)=0$$

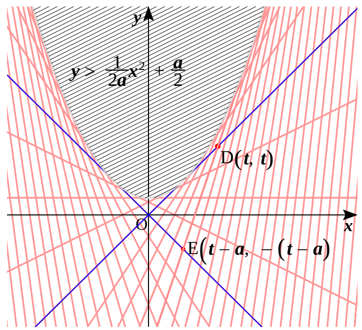
である。直線が通らない範囲は、判別式Ｄ＜０となればよいので、

$$\frac{1}{4}\mathrm{D}=(x+a)^2-2a(x+y)<0$$

よって、

$$y>\frac{1}{2a}x^2+\frac{a}{2}$$

を得る。



※　結論の放物線を $y=px^2+q$ の形になるようにするため、２つの動点Ｄ，Ｅの速度をそろえてあるが、一定の比であれば放物線となる。

春日井東高等学校　堀部和経（ほりべ　かずのり）