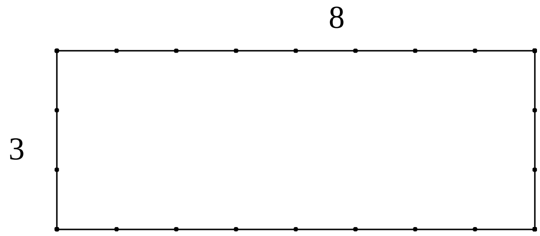
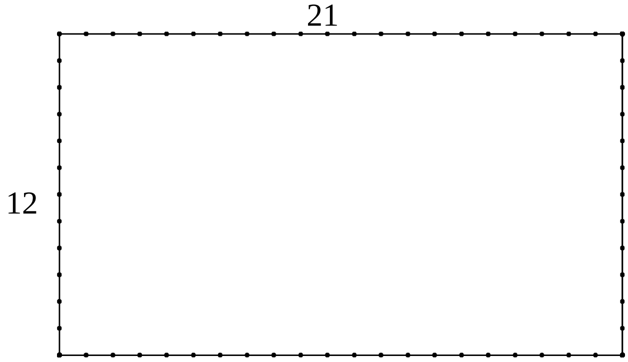
互除法と連分数，そして無理数の有理数近似の話題・前半

問題　　次の長方形から、出来るだけ大きい正方形を切り出すとき, 一辺の長さをいくつにしたらいいか。ただし，正方形はすべて同じ大きさであり，切り残しを出てはいけない。

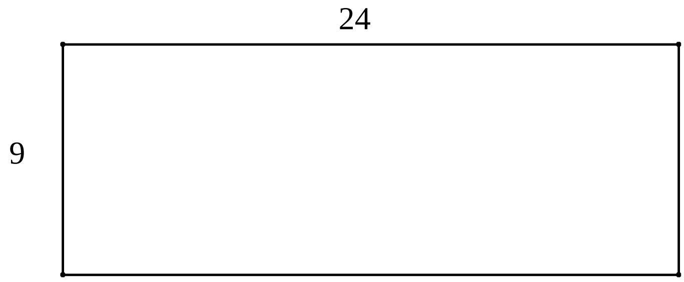
（1）



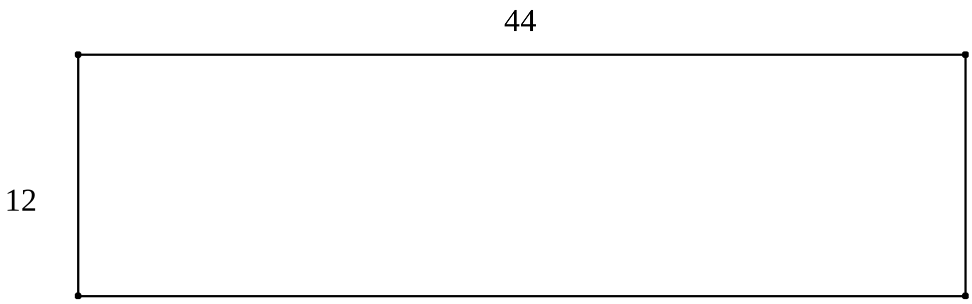
（2）



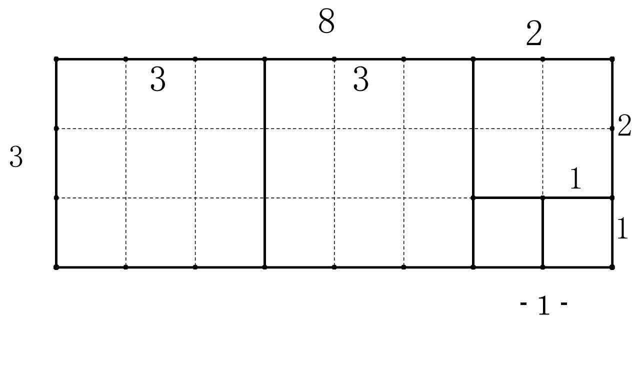
（3）



（４）



$\boxed{\text{解答}}$　　（1）の図　　　　　（2）から（4）は黒板で・・・



（1）　8 ÷ 3 ＝ 2・・・2　　　　繋がった割り算の書き方（古い方法を改作して）

3 ÷ 2 ＝ 1・・・1

2 ÷ 1 ＝ 2・・・0

（2）　　　　（3）　　　　（4）

さて、別の表現を考えてみましょう。

（1）$\dfrac{8}{3}=2+\dfrac{2}{3}=2+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{1}}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$

（2）$\dfrac{21}{12}=1+\dfrac{9}{12}=1+\dfrac{1}{\frac{12}{9}}=1+\dfrac{1}{1+\frac{3}{9}}=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{9}{3}}}=1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3+0}}$

（3）$\dfrac{24}{9}=2+\dfrac{6}{9}=2+\dfrac{1}{\frac{9}{6}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{3}{6}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{6}{3}}}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$

（4）$\dfrac{44}{12}=3+\dfrac{8}{12}=3+\dfrac{1}{\frac{14}{8}}=3+\dfrac{1}{1+\frac{4}{8}}=3+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{8}{4}}}=3+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$

このような、分数の分数の分数？という形の分数を､「連分数」といいます。

そして､（1）の　$2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$ を［2；1，2］とかく事にしましょう。

すると､（2）～（4）はどう書けますか。

（2）$1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3+0}}$　　（3）$1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$　　（4）$3+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+0}}$

＝［　；　　］　　＝［　；　　］　　＝［　；　　］

互除法と連分数，そして無理数の有理数近似の話題・後半

さて，ここで少し話の筋を変えて，無理数による有理数で近似の性質を見て見よう。

定理１　完全平方でない正整数Dと大きな整数Y 対して、次の条件を満たす整数$x,\ y$ が存在する。

$$\left| x - y\sqrt{D} \right| < \frac{1}{Y} \quad , \quad 0 < y \leqq Y$$

［証明］

ある大きな整数Y に対して，次のような$Y+1$個の実数の集合Sを考える。

$$S = \left\{ 0\sqrt{D}, 1\sqrt{D}, 2\sqrt{D}, 3\sqrt{D}, \cdots, Y\sqrt{D} \right\}$$

そして，各実数$k\sqrt{D}\ \left(k = 0,1,2,\cdots,Y\right)$に対して、整数部分$N_k$と小数部分$F_k$に分ける。つまり，

$$k\sqrt{D} = N_k + F_k \quad \left(N_k \in Z\ ,\ 0 \leqq F_k < 1\right)$$

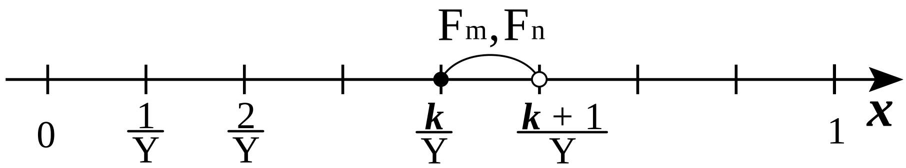
とする。そして，その小数部分全体の集合Φを考える。つまり，

$$\Phi = \left\{ F_0, F_1, F_2, F_3, \cdots, F_Y \right\}$$

とすると，$n\left(\Phi\right) = Y+1$となる。（補足説明６参照のこと）

半開区間$\left[0, 1\right)$を，長さ$\dfrac{1}{Y}$のY 個の半開区間$I_k = \left[\dfrac{k}{Y}, \dfrac{k+1}{Y}\right)\left(k = 0,1,2,\cdots,Y-1\right)$に分ける。

すると，Y 個の区間内に，集合Φの要素は$Y+1$ 個存在しているので，どこかの半開区間I_kには必ず小数



部分が２つ以上の存在している。つまり，ある整数$m,\ n\ \left(0 \leqq m < n \leqq Y\right)$があり，$F_m$と$F_n$は同じ半開区間$I_k = \left[\dfrac{k}{Y}, \dfrac{k+1}{Y}\right)$に属している。したがって，区間$I_k$の長さを考えると$\left| F_m - F_n \right| < \dfrac{1}{Y}$である。

したがって，

$$\left| F_m - F_n \right| = \left| \left(m\sqrt{D} - N_m\right) - \left(n\sqrt{D} - N_n\right) \right| = \left| \left(N_n - N_m\right) - \left(n-m\right)\sqrt{D} \right| < \frac{1}{Y}$$

ここで，$x = N_n - N_m$，$y = n - m\ \left(>0\right)$とおけば，$x,\ y$は共に整数で，$0 < y = n - m \leqq n \leqq Y$である。

故に，$\left| x - y\sqrt{D} \right| < \dfrac{1}{Y}$，$0 < y \leqq Y$を満たす整数$x,\ y$は存在する。　　　　［証明終わり］

定理２　完全平方でない正整数Dに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y}$$

［証明］

定理１で整数x, yを固定したままYを大きくしていくと，不等式は成り立たなくなる。

そこで、新たに整数x, yをとりなおす。$\frac{1}{Y}\leqq\frac{1}{y}$であるので、この作業を続ければよい。

［証明終わり］

系３　完全平方でない正整数Dに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y^2}$$

以上の議論を無理数$\sqrt{D}$の代わりに、任意の無理数αに適用すれば、次の系４を得る。

系４　任意の無理数αに対して、次の条件を満たす整数の組$(x,\ y)$が無数に存在する。

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|<\frac{1}{y^2}$$

系３および系４は、有理数$\frac{x}{y}$が無理数αの近似であることを示している。

【まとめ】

そして，$\sqrt{5}$の近似有理数$q={}^{682}\!/_{305}$の分母の自乗$305^2=93025$分の1より小という精度での近似が可能であり、必要に応じてその精度をあげることができる。

このことは小数による近似がその小数の有効数字桁数に依存していることと比べると、良い性質である。

さて，ここで$\sqrt{5}$の近似有理数$q={}^{682}\!/_{305}$が，系３の不等式を満たしているか確認してみよう。

$$q={}^{682}\!/_{305}=2.236065573\cdots$$

$$\left|q-\sqrt{5}\right|=0.00000240<0.000010749798441\cdots={}^{1}\!/_{305^2}$$

と，実際に不等式を満たしている。

【付録】

補足説明６　　集合$\Phi=\left\{F_0,F_1,F_2,F_3,\cdots,F_Y\right\}$の要素は全て異なる。$n\left(\Phi\right)=Y+1$である。

［証明］

$$F_k=F_l\ \Rightarrow\ k=l$$　を示せばよい。

$F_k=F_l$より，$k\sqrt{D}-N_k=l\sqrt{D}-N_l$となり，

$$\left(k-l\right)\sqrt{D}=N_l-N_k$$

を得る。今、$k\neq l$とすると、

$$\sqrt{D}=\frac{N_l-N_k}{k-l}$$

とできる。

ところで，この等式の左辺は無理数、右辺は有理数である。これは，矛盾。

よって、$k=l$である。

故に、$n\left(\Phi\right)=Y+1$となる。　　［証明終わり］

この証明の中で、左辺$\sqrt{D}$を無理数としているが、これについては次の補足説明７を参照のこと。

補足説明７　完全平方でない正整数Dに対して、$\sqrt{D}$は無理数である。

［準備］

素数pに対して$\sqrt{p}$を有理数と仮定すると，$\sqrt{p}=\dfrac{y}{x}$（x,yは正の整数）とおける。

よって，

$$y^2=p\cdot x^2$$

となる。

ここで，両辺を素因数分解し，素数pの指数を数えると，左辺は偶数であるが，右辺は奇数である。

これは，素因数分解の一意性に矛盾する。　　［準備終わり］

［証明］

Dの条件から，Dの素因数pでその指数が奇数のものが存在する。

$$\sqrt{D}=\frac{y}{x}$$　（x,yは正の整数）

とおけば，$y^2=D\cdot x^2$となる。

準備と同様に，素数pの指数を数えると矛盾する。　　［証明終わり］

春日井東高校　堀部和経　（２０１４／６）