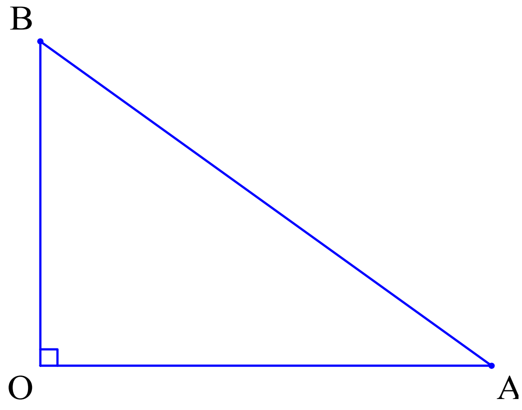
四平方の定理



［三平方の定理］

　よく知られているように，右の直角三角形 OAB において，

$$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2$$

である．［証明略］

［四平方の定理］

　さて，頂点Oに集まる角がすべて 90° となっている四面体 OABC を考える．このとき，

$$\triangle\mathrm{OAB}^2+\triangle\mathrm{OBC}^2+\triangle\mathrm{OCA}^2=\triangle\mathrm{ABC}^2$$

である．

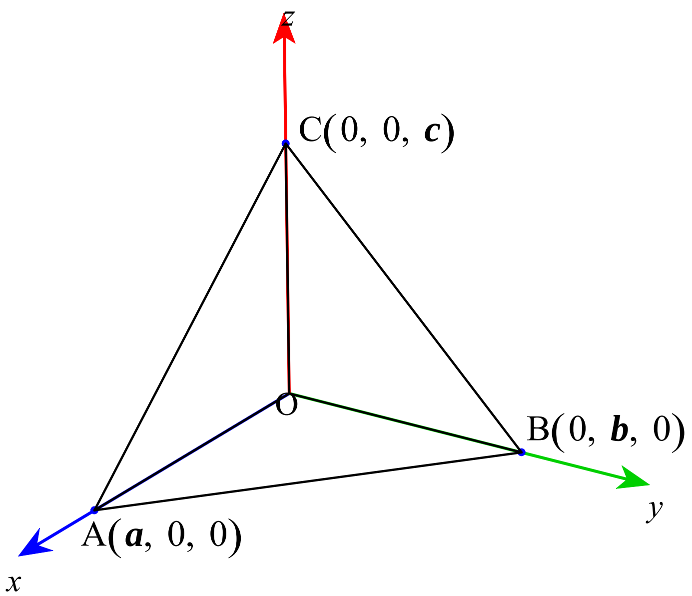
［証明］　右の図のように 4 点 O,A,B,C の座標を定める．

いま，$a>0, b>0, c>0$ としてよい．すると，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab$$

$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc$$

$$\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}ca$$



となる．次に△ABC の面積を求める．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$$

となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(bc,\ ca,\ ab)$$

したがって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

よって，

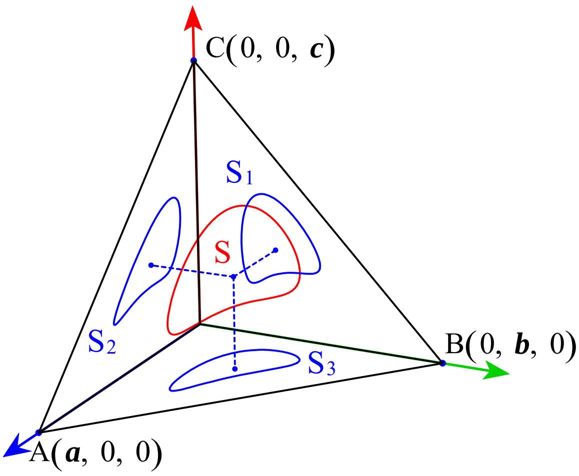
$$\triangle\mathrm{ABC}^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}ab\right)^2+\left(\frac{1}{2}bc\right)^2+\left(\frac{1}{2}ca\right)^2$$

$$=\triangle\mathrm{OAB}^2+\triangle\mathrm{OBC}^2+\triangle\mathrm{OCA}^2$$

［証明終り］

［四平方の定理］（その２）



平面 ABC 上の図形を S とする．その図形を，3 つの座標平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面にそれぞれ正射影した図形を S_1，S_2，S_3 とすると，

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2$$

が成り立つ．

［証明］

平面 ABC と，3 つの座標平面，xy 平面，yz 平面，zx 平面のなす角をそれぞれ，$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とすると，

$$S_1=S\cos\theta_1,\ S_2=S\cos\theta_2,\ S_3=S\cos\theta_3$$

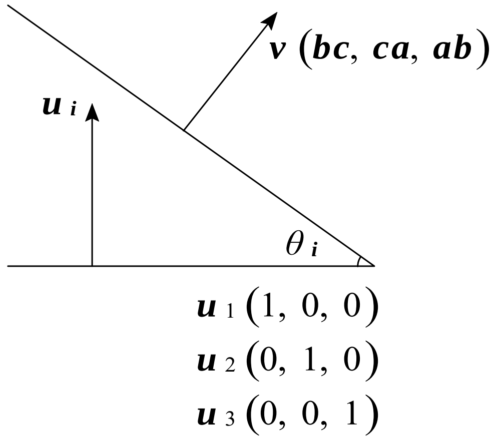
である．

ところで，平面 ABC の法線ベクトルは，

$$\vec{v}=(bc, ca, ab)$$

であり，3 つの座標平面の法線ベクトルは，

$$\vec{u_1}=(1, 0, 0), \vec{u_2}=(0, 1, 0), \vec{u_3}=(0, 0, 1)$$



であるから，

$$\cos\theta_1=\frac{bc}{|\vec{v}|}, \cos\theta_2=\frac{ca}{|\vec{v}|}, \cos\theta_3=\frac{ab}{|\vec{v}|}$$

となる。したがって，

$$S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2\times\frac{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}{|\vec{v}|^2}=S^2\times1=S^2$$

（その２）参考文献　：　「高校数学の美しい物語」WEB-SITE　https://mathtrain.jp/

【備考】この定理は、最近大学時代の後輩から質問されて知りました。証明はすぐに・・・。こんな面白い性質があったのですね。

全体として結果はとても面白いものであると思いました。