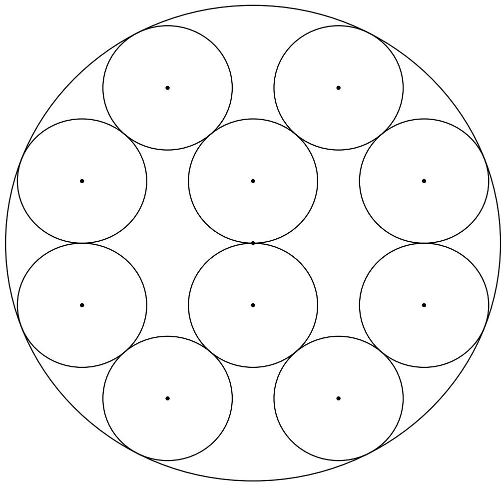
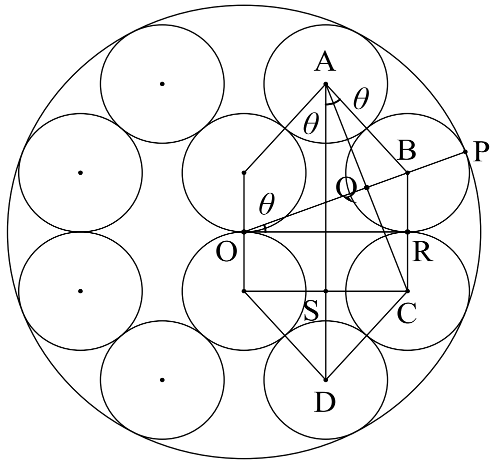
江川邸の算額の問題より



［問題１］
図のように，半径 R の大円の中に，半径 r の円が１０個接している。
（円の配置は、上下対称かつ左右対称である。）
このとき，R と r の関係式を求めよ。



（解）△ABC は，二等辺三角形であるから，

∠BAC＝∠BCA

したがって，∠DAC=∠BAC である。

また，∠ABQ＝∠CBQ であるから，

∠BAQ＝∠BOR

まとめて，

∠BOR＝∠BAQ=∠CAS＝θ

とおく。次の３つの直角三角形は相似である。

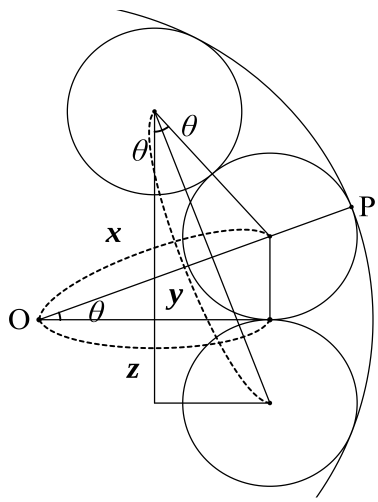
△BOR∽△BAQ∽△CAS

以後，この３つの直角三角形を考察する。

$OB = x,\ AC = y,\ OR = z$

とおく。相似比を考え，

$$\cos\theta = \frac{z}{x} = \frac{\frac{1}{2}y}{2r}\ ,\ \sin\theta = \frac{r}{x} = \frac{\frac{1}{2}z}{y}$$



したがって，

$$z = \frac{xy}{4r} = \frac{2ry}{x}$$

つまり，$x^2 = 8r^2$ なので，$x = 2\sqrt{2}\,r$

さて，大円の半径は、$R = OP = x + r$ であるから，

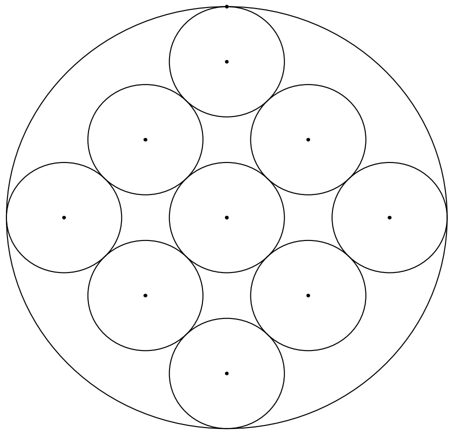
$$R = x + r = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)r$$

［問題２］

図のように，半径Rの大円の中に，半径rの円が９個接している。

（円の配置は、上下対称かつ左右対称である。）

このとき，Rとrの関係式を求めよ。



（解）△ABO は，直角二等辺三角形であり，

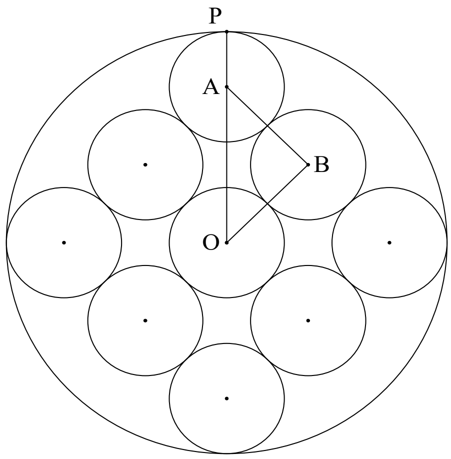
$$AB = BO = 2r$$

であるので，

$$AO = 2\sqrt{2}\,r$$

したがって，

$$R = PO = PA + AO = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)r$$



［まとめ］

ここでは，問題１・問題２と分けて説明しているが，元の算額では，ひとつの問題として書かれている。

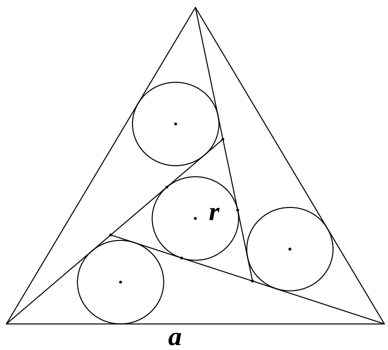
この江川邸の算額は，享和２年（１８０２）江川英毅（１７７０－１８３４）が土祠に奉納したもので，横９０．３ｃｍ縦４４．３ｃｍの小型算額である。和算書「賽祠神算」に記録されていて現存は確認されていなかった。平成２４年江川邸の倉庫で発見された。額面にはもう一題の記載がある。（深川英俊氏）

［公益財団法人　江川文庫の所蔵品］

参考・［算額に書かれているもうひとつの問題］

一辺がaの正三角形の中に図のように４つの三角形があり，それらの内接円の半径がすべて等しくrである。

このとき，aとrの関係式を求めよ。

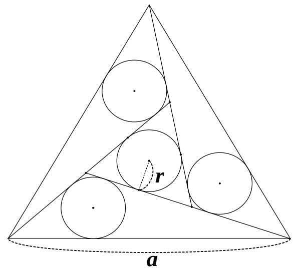


ここでは，解答を省略します。（考えてみましょう。）

この算額については，深川英俊氏よりご教授いただきました。感謝！！　　2017/6/29

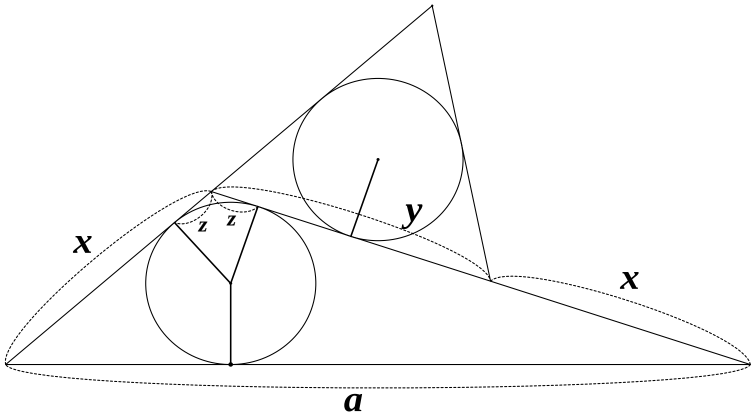
一辺が a の正三角形の中に図のように４つの三角形があり，それらの内接円の半径がすべて等しく r である。

このとき，a と r の関係式を求めよ。



（解答）

図の一部を拡大し、図のように線分の長さを，x, y, z ととおく。



$$a=(x-z)+(x+y-z)$$

であるから，

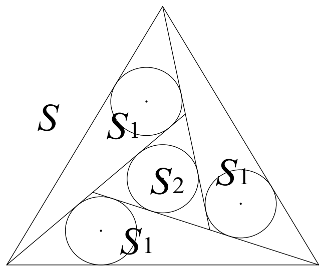
$$2x+y=a+2z$$

となる。

また、

$$y=2\sqrt{3}\,r,\qquad z=\frac{1}{\sqrt{3}}r=\frac{\sqrt{3}}{3}r$$

一辺が a の正三角形の面積を S とし、図のように小さな三角形の面積を S_1, S_2 とすると，



$$3S_1+S_2=S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

である。そして，

$$3S_1=3\cdot\frac{1}{2}\left\{a+x+(x+y)\right\}r=\frac{3}{2}(2a+2z)\,r=(3a+3z)\,r=3ar+\sqrt{3}\,r^2$$

$$S_2=\frac{1}{2}(y+y+y)r=3\sqrt{3}\,r^2$$

であるから，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=3ar+4\sqrt{3}\,r^2 \qquad \text{よって} \quad 16r^2+4\sqrt{3}\,ar-a^2=0$$

$a>0,\ r>0$ であるから，

$$r=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{8}a$$

を得る。

堀部　和経　2017/6/30