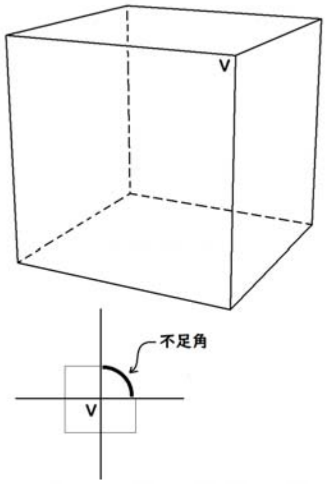
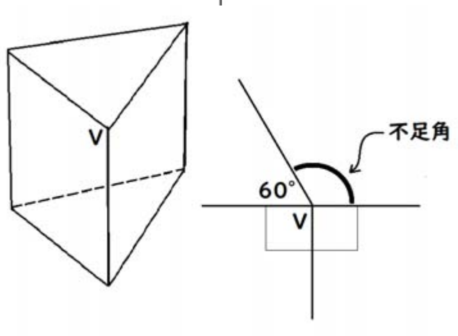
デカルトの定理を証明するための準備

（多面体における）頂点の不足角について



（例１）立方体の各面は、正方形であり，その正方形の内角は，$90°$である。ひとつの頂点に正方形は，３つ集まっている。したがって，$90\times3=270°$ となる。これと，１周の$360°$との差，つまり，$360-270=90°$を，この頂点の不足角という。

頂点の数が8個であるから，この不足角をすべて合計すると，$90\times8=720°$ である。

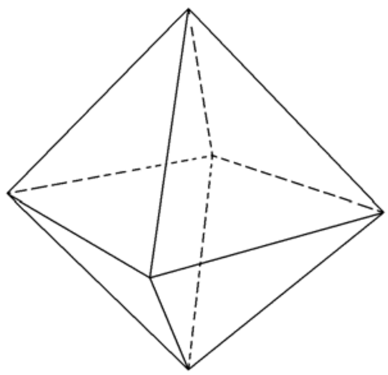


（例２）正三角柱の側面は長方形で，ふたつの底面は正三角形である。この場合，ひとつの頂点の不足角は，

$360-\left(90\times2+60\right)=120°$である。

頂点の数は，６個であるから，不足角の合計は，$120\times6=720°$ である。

（例３）正八面体の各面は、正三角形である。この場合，



［ひとつの頂点の不足角］＝

［頂点の数］＝

［不足角の合計］＝

（例４）自分で考えた多面体について考えてみよう。

［ひとつの頂点の不足角］＝

［頂点の数］＝

［不足角の合計］＝

以上の例では，多面体の不足角の総和は，$720°$であると言える。

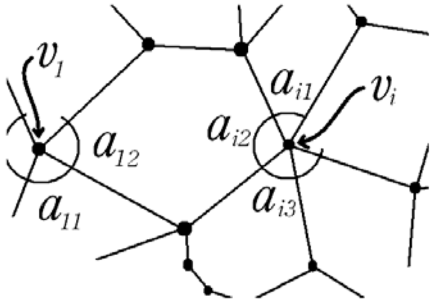
［予想］　すべての多面体の不足角の総和は，4π である。

デカルトの定理

多面体の不足角の総和は，4π である。

多面体のすべての頂点に番号を付け $v_i \ (i = 1, \cdots, v)$ とする。

つまり、$v = \sum_i 1 \cdots$① である。



いま、各 i について、v_i の周りの角を $a_{ij} \ (j = 1, \cdots, k_i)$ とする。

このとき、各 i について頂点 v_i の周りの角の和 $\sum_j a_{ij}$ は 2π より小さい。その不足角を δ_i とする。つまり、$\delta_i = 2\pi - \sum_j a_{ij} \ (>0) \cdots$②とする。

このとき、$\sum_i \delta_i = 4\pi$ となる事を示す。

【証明】この多面体の面の n 角形は f_n 個あるとすると，$f = \sum_n f_n \cdots$③である。

また，多面体の辺１本は，（多面体の）面の辺２本で１本と数えるから、すべての面の辺の数の半分である。つまり，$e = \frac{1}{2}\sum_n n f_n \cdots$④　となる。

ところで、n 角形の内角の和は，$(n-2)\pi$ であるから、すべての面の内角の和で等式を作ると，次の様になる。

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_n (n-2)\pi \, f_n \cdots ⑤$$

さて、不足角の総和 $\sum_i \delta_i$ を順次計算する。（右端は適用した等式の番号など）

$$\sum_i \delta_i = \sum_i \left(2\pi - \sum_j a_{ij} \right) \quad \leftarrow ②$$

$$= \sum_i 2\pi - \sum_i \sum_j a_{ij}$$

$$= 2\pi \sum_i 1 - \sum_n (n-2)\pi \, f_n \quad \leftarrow ⑤$$

$$= 2\pi v - \pi \sum_n n \, f_n + 2\pi \sum_n f_n \quad \leftarrow ①$$

$$= 2\pi v - 2\pi e + 2\pi f \quad \leftarrow ④，③$$

$$= 2\pi \, (v - e + f) \quad \leftarrow \text{オイラーの定理}$$

$$= 4\pi$$

【参考】（オイラーの定理）

（穴の無い）多面体において，頂点数 v，辺数 e，面数 f とすると、$v - e + f = 2$