

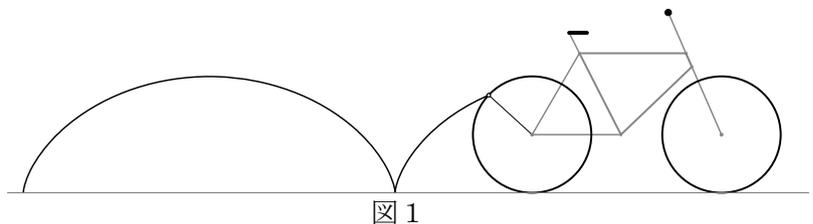
サイクロイドの長さ・面積 —— 微分積分学以前 ——

堀部 和経

§ 0 はじめに

思い起こすと私が高校生の時、数学を教えていただいた河合先生に「微積を学ぶと、サイクロイドの面積や長さも計算出来るようになる」と教えられ、私自身も生徒に何年もの間、同じように教えてきました。

しかし、少し歴史を調べてみると、人類がサイクロイドの長さや面積を知識として知っている時期と微分積分学の萌芽の時期が前後していることに気がつきました。「これはどういうことか?」、「おかしいじゃないか?」と思い、その当時のアイデアを高校生が読めるようにとまとめました。



§ 1 微分積分を使って

(1) サイクロイドの説明

サイクロイドを簡単に解説しよう。

図1のように、自転車が平坦な道（地面）をまっすぐ進んでいる様なとき、タイヤの外周の1点Pが描く軌跡をサイクロイドという。

(2) デカルト座標による表現

計算を簡単にするため自転車のタイヤの半径を1としよう。

点Pが道（地面）に接している点を原点にし、図2のように座標軸をとる。点Aは自転車の車軸の中心、点Bは点Aから道（地面）に降ろした垂線の足とする。また、点HをPH⊥ABとなるように直線AB上にとる。

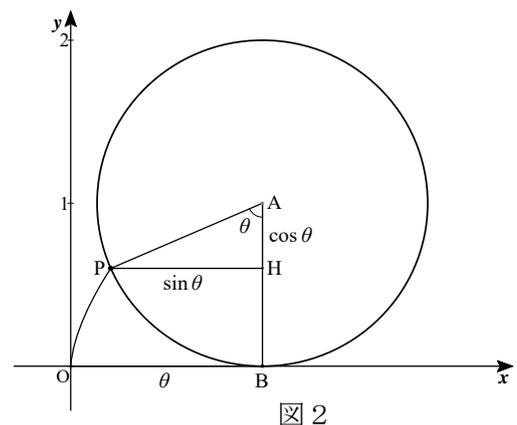
ここで、 $\angle PAB = \theta$ とすると、明らかに

$$\overline{OB} = \widehat{PB} = \theta$$

したがって、 $PH = \sin \theta$ 、 $AH = \cos \theta$ であるから、点P (x, y) とすると、

$$P: \begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases} \quad (\text{但し } 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

となる。



(3) サイクロイドの長さ

自転車が走り続ければ長さは確定しないので、タイヤが1回転する分の長さ L を計算してみよう。

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 2\pi \\ \hline \theta & 0 \rightarrow 2\pi \end{array}$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

ところで、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi$ となることから、 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ である。したがって、

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta = \left[-4 \cos \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8$$

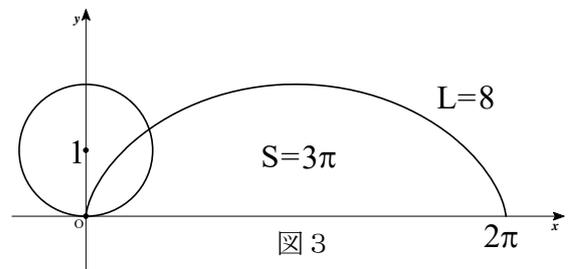
つまり、サイクロイドの長さは $L = 8$ となる。

これは「あまりに美しい値」とは感じませんか。

(4) サイクロイドの面積

タイヤが1回転する分のサイクロイドと道（地面）の間の面積 S を計算してみよう。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - 2 \cos \theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \right\} d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta - 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi \end{aligned}$$



これも「あまりに美しい値」とは感じませんか。

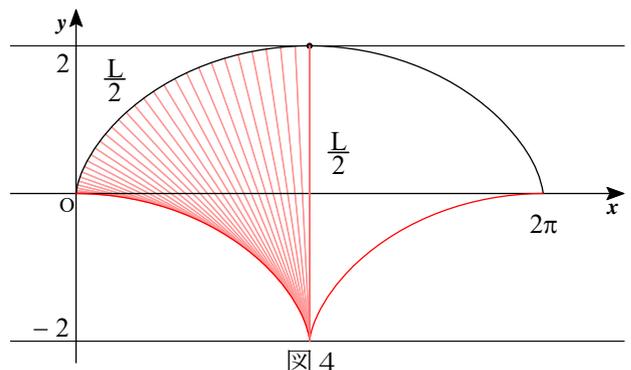
サイクロイドと地面の間の面積 $S = 3\pi$ ですね。円（タイヤ）の面積 π のちょうど3倍ですね。（図3）

§ 2 微分積分以前

微積分学の成立以前にもサイクロイド(Cycloid)の長さや面積は知られていた。その長さや面積はどのようにして計算されていたかを解説する。

(5) サイクロイドの長さ

端的に説明すれば、サイクロイドの縮閉線（エボ



リュート, evolute) は, サイクロイドになる。したがって, サイクロイドの伸開線 (インボリュート, involute) もサイクロイドであることから, 伸開する糸の長さが4であるので, サイクロイドの長さは, その倍の8である。

図4で言えば $\frac{L}{2} = 4$, したがって $L = 8$ となる。

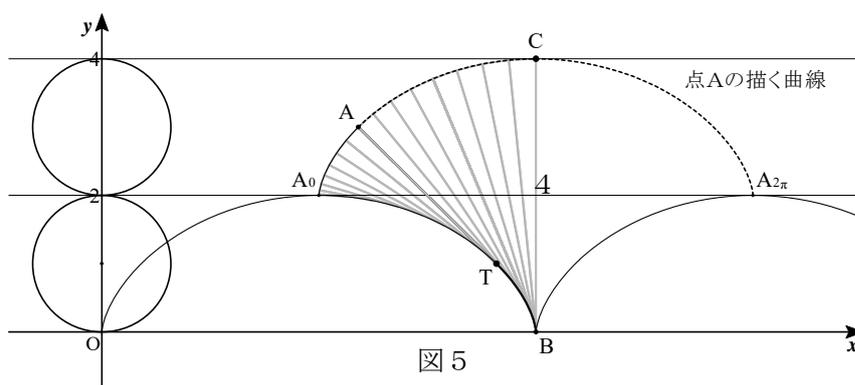
ただ, この説明では多くの高校生が, 「何のことか分からない」と言うであろう。

もうすこし少し丁寧な説明をしよう。

図5の中の下の方の2つの曲線は2つのサイクロイドである。自転車で説明すると, タイヤ2周分のサイクロイドと思って欲しい。

その丁度真ん中の点Bに糸の端を固定し, 左のサイクロイドの頂点 A_0 までサイクロイドに沿わせながら, 糸を張る。

端点 A_0 から点Aを通って点Cまで糸をピンと張りつつ移動させる。注意することは, 糸とサイ



クロイドの接点Tから点Bまではサイクロイドに沿わせることである。このように点Aを動かしていくと美しい曲線を描く。図5では, 弧 $\widehat{A_0 A C A_{2\pi}}$ のことである。これが2つのサイクロイドと合同になる。つまり, この図の中の3つのサイクロイドはすべて合同である。

さて, 最初に張った糸の長さつまり弧 $\widehat{A_0 T B}$ は, サイクロイド長さの半分である。したがって, サイクロイドの長さは, 糸の長さの2倍である。このことから, 糸の長さを求めれば良い。

点Aがサイクロイドの頂点Cと一致した時を考えれば, 糸の長さは, $\widehat{A_0 T B} = \overline{BC}$ であり, \overline{BC} はタイヤの直径2つ分, つまり糸の長さは4であるので, サイクロイドの長さは8と分かる。

(6) サイクロイドの面積

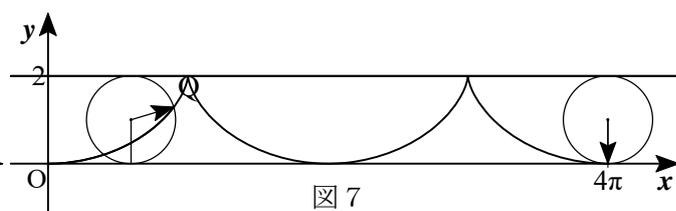
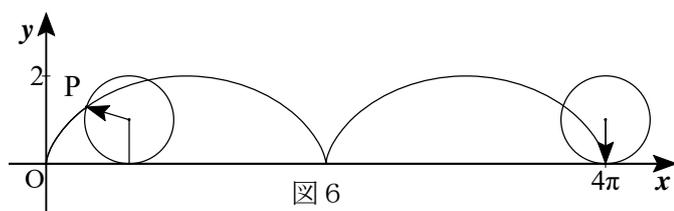


図6のサイクロイドは, 今までと同じものでタイヤを2周した部分を描いている。図7は天井に張り付いたタイヤが天井を滑らないように回転した時にできる軌跡としてのサイクロイドです。

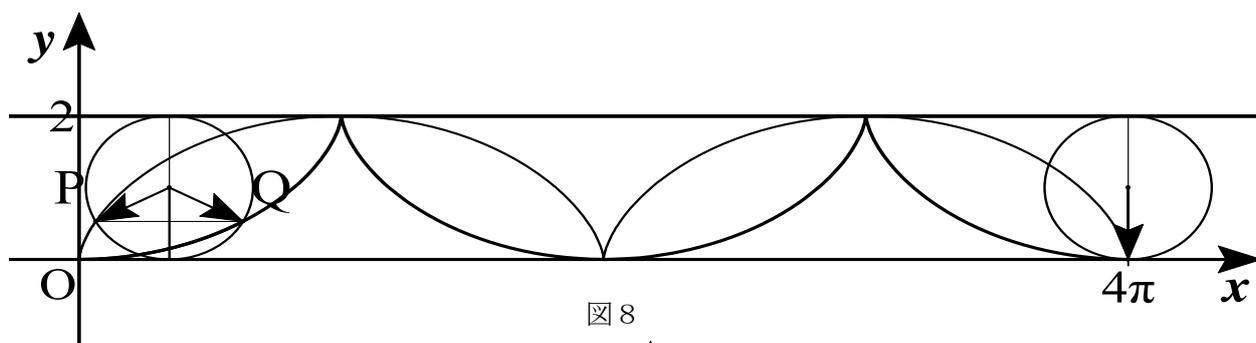


図 8

図 8 は、この 2 つのサイクロイドを重ねて描いたものである。そして、図 9 は図 8 の左端を拡大したものである。

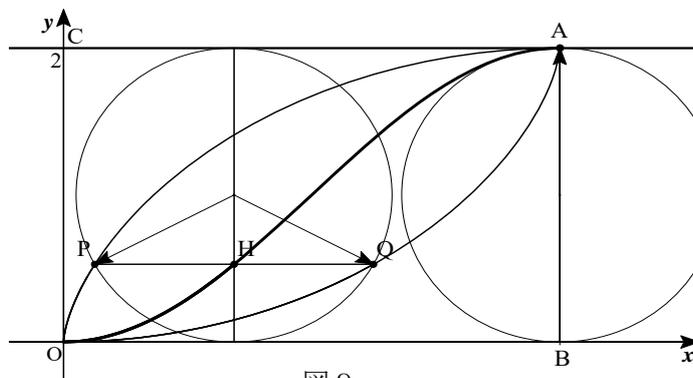


図 9

サイクロイド上の点 P から、 y 軸に平行な直径に下ろした垂線の足を H とする。このとき、点 H は、2 点 P, Q の中点である。

このことから、点 H の軌跡 (曲線 O-H-A) は、長方形 OBAC の中心点に関して点対称な曲線となっている。

点 H の軌跡 (曲線 O-H-A) 長方形 OBAC の面積を二等分している。長方形 OBAC の縦、横の辺の長さはそれぞれ $2, \pi$ である。長方形 OBAC = 2π であることから、点 H の軌跡と折れ線 OBA で囲まれた部分の面積は π となる。

ところで、点 H の軌跡 (曲線 O-H-A) は、随伴線、コンパニオン (Companion) と呼ばれている。

円 (タイヤ) 1 回転分の随伴線と x 軸で囲まれた部分の面積は $S_C = 2\pi$ である。

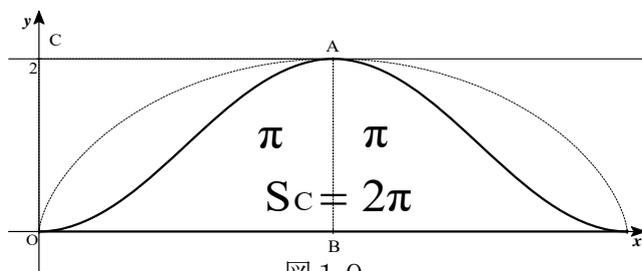


図 10

最後に、サイクロイドと随伴線の間面積について、左側と右側に分けて考えて見よう。

まず左側は、タイヤの回転位置のすべてにおいて、すべての垂線 PH の長さは、円周から直径に降ろしたすべての垂線の長さに等しい。したがって、左側の面積の差は半円の面積に等しい。右側も同様なので、左右合計で π となる。

したがって、サイクロイドと x 軸の間の面積は、 3π となる。

このアイデアは、ローベルバル (1602-1675) によるものである。

§ 3 まとめ

「いま学んだ微分積分で計算しても、以前から知っているサイクロイドの面積や体積の値について、間違い無く計算出来ますね」ということです。

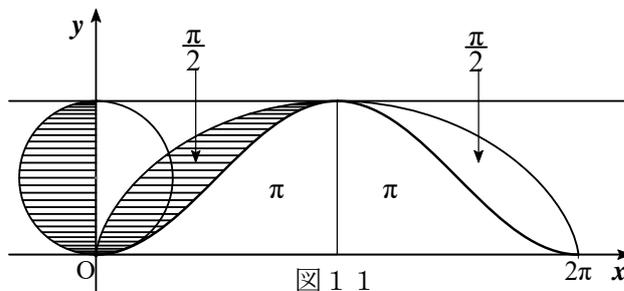


図 11