長方形と楕円そして円の接する条件

右の図のような長方形と内接する楕円（長軸$2a$、短軸$2b$）に対して、内外接する円の半径rをa,bで表せ。

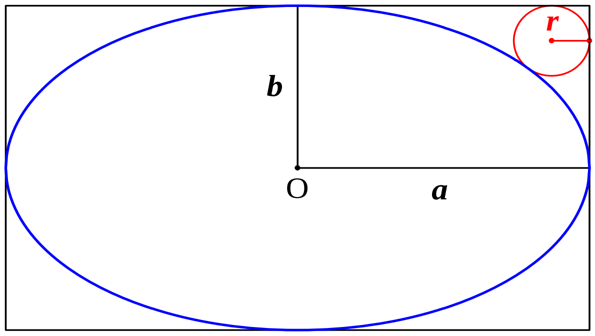

図１

(解)

いま仮に図２のように円と楕円が接していない場合を考え、楕円と円の共通接線ＰＱ（$\mathrm{P_1Q_1}$）を考える。このとき、ＡＰ＝x，ＡＱ＝yとする。

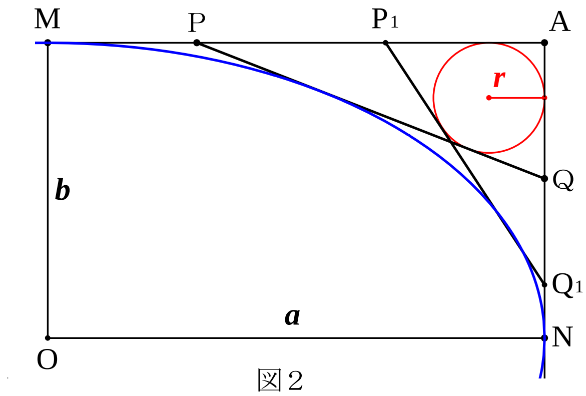

図２

△ＡＰＱは直角三角形なので、

$$2r = x + y - \mathrm{PQ}$$

であり、

$$\triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}r(x + y + \mathrm{PQ})$$

となっている。これらよりＰＱを消去すると、

$$2r + \frac{xy}{r} = 2(x + y)$$

$$xy - 2rx - 2ry + 2r^2 = 0$$

$$(x - 2r)(y - 2r) = 2r^2$$

そして、

$$y = 2r + \frac{2r^2}{x - 2r} \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

を得る。

さて、図２を縦に$\dfrac{a}{b}$倍（アフィン変換）すると、楕円は円になるので、

$$x + y\cdot\frac{a}{b} + \mathrm{PQ'} = \mathrm{AM} + \mathrm{AN} = 2a$$

となる。また△ＡＰＱ’は、直角三角形なので

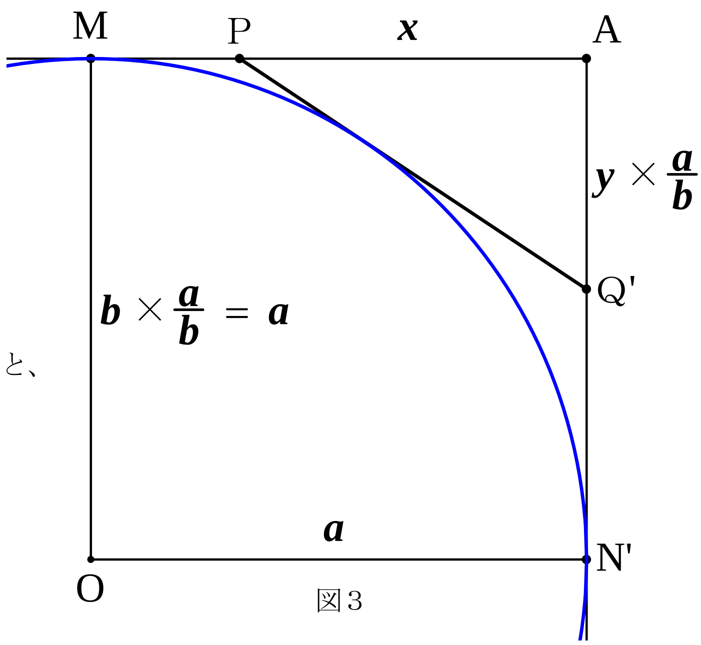

図３

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2 = \text{ＰＱ'}^2$$

である。この条件式から、ＰＱ’を消去すると、

$$x^2+\left(\frac{a}{b}y\right)^2=\left(2a-x-\frac{a}{b}y\right)^2$$ となり、

整理して　$2ab-2bx-2ay+xy=0$　を得る。

そして、これは、　$2b(a-x)-y(2a-x)=0$　となるが、これに①を代入し y を消去すると、

$$2b(a-x)-\left(2r+\frac{2r^2}{x-2r}\right)(2a-x)=0$$

となる。もう少し整理を続ける。

$$b(a-x)(x-2r)-r(x-r)(2a-x)=0$$

$$b(x-a)(x-2r)-r(x-r)(x-2a)=0$$

$$b(x^2-(a+2r)x+2ar)-r(x^2-(2a+r)x-2ar)=0$$

$$(b-r)x^2+(r^2+2ar-2br-ab)x+2ar(b-r)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

さて、図２において、円と楕円が接することから、線分ＰＱはただ１本に限る。つまり、x の２次方程式②は重解を持つ。したがって、条件式

$$(r^2+2ar-2br-ab)^2-8ar(b-r)^2=0$$

を得る。それを展開し整理すると、

$$r^4-4(a+b)r^3+(4a^2+4b^2+6ab)r^2-4(a^2b+ab^2)r+a^2b^2=0$$

$$(r^2-2(a+b)r+ab)^2=4abr^2$$

となる。そして、

$$r^2-2(a+b)r+ab=\pm2\sqrt{ab}r$$

となり、r の２次方程式

$$r^2-2(a+b\pm\sqrt{ab})r+ab=0$$

を得る。そして、この r の２次方程式を解いて、

$$r=a+b\pm\sqrt{ab}\pm\sqrt{D/4}$$ （複号全順）

となる。ここで、

$$D/4=(a+b\pm\sqrt{ab})^2-ab=(a+b)^2\pm2(a+b)\sqrt{ab}$$

$$=(a+b)(a+b\pm2\sqrt{ab})=(a+b)(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2$$

であるので、

$$r=a+b\pm\sqrt{ab}\pm\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b}$$

となる。(注意、複号を前からα、β、γと呼べば、αとγは複号同順であり、それらとβは複号全順)

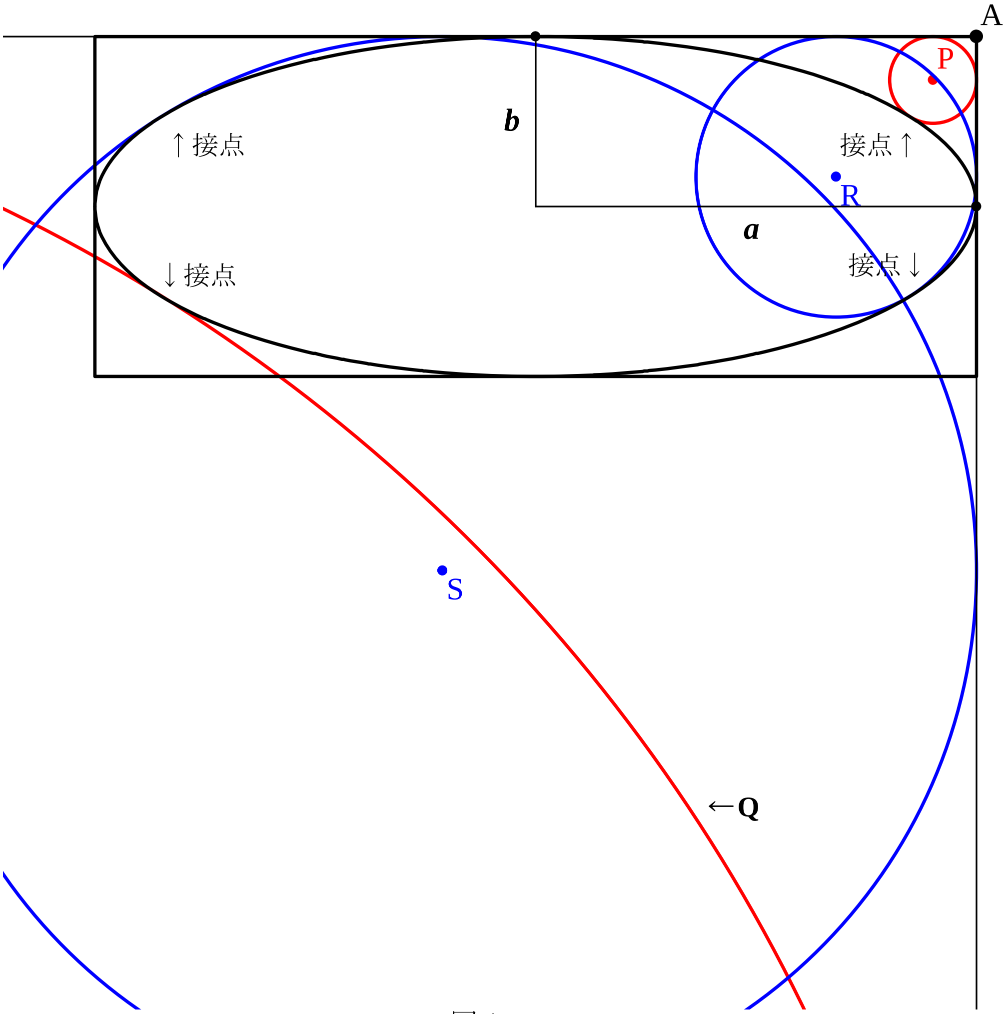

図４

つまり、図４では、４つの円P，Q，R，Sの半径はそれぞれ、

$$r_{\mathrm{P}}=a+b+\sqrt{ab}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b}$$

$$r_{\mathrm{Q}}=a+b+\sqrt{ab}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b}$$

$$r_{\mathrm{R}}=a+b-\sqrt{ab}-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b} \qquad (a>b \text{ のとき})$$

$$r_{\mathrm{S}}=a+b-\sqrt{ab}+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\sqrt{a+b} \qquad (a>b \text{ のとき})$$

となる。 (終)

深川英俊・ダンペドー共著「日本の幾何　何題解けますか？」には、藤田貞資「精要算法」第３巻、天明元年（1781 年）にこの結果が記載されていることが述べられています。(但し、図１の場合のみ)

2008. 7. 28　春日井東高校　堀部　和経