カライドサイクル （kaleidocycle）

カライドサイクルは，$2n$ 個の四面体をリング状に繋ぐことで，そのリングがクルクルと回る立体構造をした，「おもちゃ」です。（図１は，$n=4$ の場合，つまり８個の四面体で構成されている。）カライドサイクルの構造を計算することで，アニメーションを作って見よう。

ここにでてくる基本となる四面体の運動を考える。この四面体の形状の条件として、（１）まず向かい合う１組の辺が垂直である四面体を考える。（２）その後，向かい合う１組の辺が垂直でない，任意のねじれの位置にある四面体を考える。

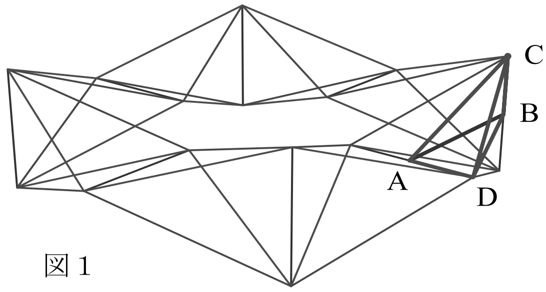


図１

（１）１組の辺が垂直である四面体において，他の２組の向かい合う４辺が全て同じ長さであるとして考える。（一般生を失さない。）このとき基本となる四面体の四半分の立体（四面体 ABCD）を考え，この構造の計算を進める。図２は，この四面体 ABCD を見取り図である。カライドサイクルの動きを解析刷るために、剛体としての四面体 ABCD を考えるのだが，「折れ線 DABC」を考えれば十分である。なぜなら，カライドサイクルが回転する仕組みは，折れ線 DABC の２つの線分 DA と BC がそれぞれ，平面 α と β に常に含まれるという条件を満たし，四面体 ABCD が空間内で回転運動のような動きをすることにより実現できるからである。

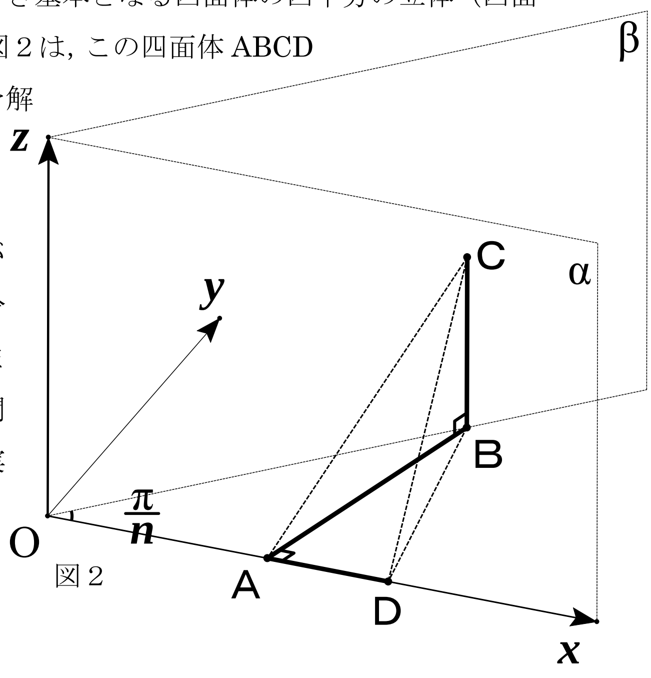


図２

（※　簡単のため，点 A の y, z 座標は 0 に固定する。）

具体的に各点に座標を与えた後，空間内の回転運動を計算することにより，この運動が可能なことを示す。

一般性を失さずに AD=BC=1 とでき，次の様に座標をとる。

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{C}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{D}=\begin{pmatrix} a+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

さて，折れ線 DABC を空間内で回転移動させても，線分 DA は平面 α に含まれ，かつ線分

BC は平面βに含まれるいう条件を調べる。このため，線分 DA が平面αに含まれたまま、折れ線 DABC が移動するという運動を，基本となる２つの回転移動に分けて考える。

まず１つ目の回転は，直線 AD（x軸）を回転軸とし角tだけの回転を考える。各点 A,B,C,D を回転移動した後の点をそれぞれ添字の１をつけて表す。（図３）

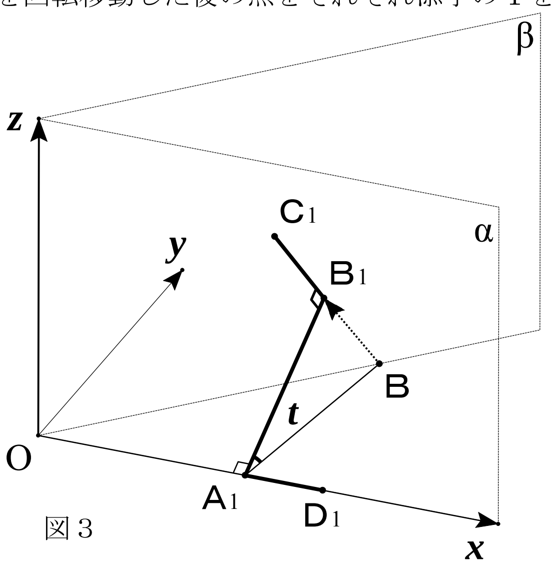


図３

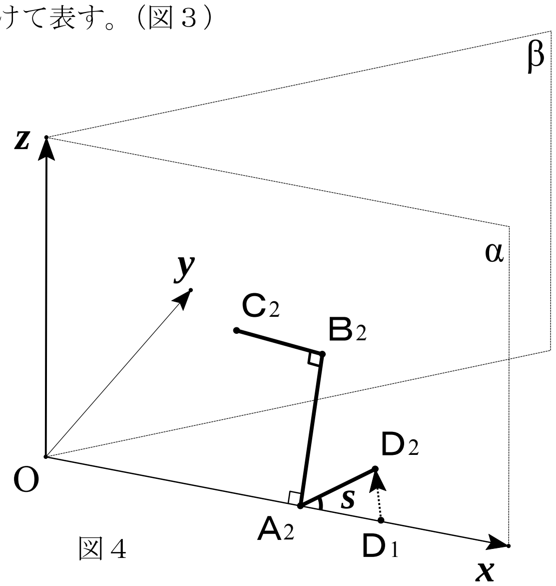


図４

次に，折れ線 $D_1A_1B_1C_1$ を点 A_1 を通り y 軸に平行な直線を回転軸とし角sだけの回転を考える。この２つの移動の結果，折れ線 DABC は，$D_2A_2B_2C_2$ となる。（図４）このとき，線分 DA→D_2A_2 はこの移動で平面αに含まれたままでであることが確認できる。したがって，線分 BC の移動後の線分 B_2C_2 が平面βに含まれればよい。つまり，２点 B_2,C_2 が平面βに含まれる条件を考えればよい。ここで平面βは，$\beta=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;y=mx,\ z:\text{任意}\right\}$となっている。但し，$m=\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$とおく。

さて次に，空間内の回転運動を表す行列は，

$$X_\theta=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad Y_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

である。ちなみに，X_θ, Y_θ はそれぞれx, y軸を回転軸とし角θの回転を表す行列である。この２つの行列と平行移動を組み合わせることで，全体の移動を表す関数を作る。

その関数を f とし，任意の点 P の位置ベクトル $\mathrm{P}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ に対して $f(\mathrm{P})$ と表せば，

$$f(\mathrm{P})=Y_s\cdot X_t\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{A})+\mathrm{A}$$

となっている。（※　ただし，点 A とその点の位置ベクトルは同一視。）

具体的に行列の計算すると，

$$f(\mathrm{P})=\begin{pmatrix}\cos s & 0 & \sin s\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin s & 0 & \cos s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos t & -\sin t\\ 0 & \sin t & \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(x-a)\cos s+y\sin t\sin s+z\cos t\sin s+a\\ y\cos t-z\sin t\\ -(x-a)\sin s+y\sin t\cos s+z\cos t\cos s\end{pmatrix}$$

となる。したがって，点（＝ベクトル）B,C を代入して，

$$\mathrm{B}_2=f(\mathrm{B})=\begin{pmatrix}b\sin t\sin s+a\\ b\cos t\\ b\sin t\cos s\end{pmatrix}\ ,\ \mathrm{C}_2=f(\mathrm{C})=\begin{pmatrix}b\sin t\sin s+\cos t\sin s+a\\ b\cos t-\sin t\\ b\sin t\cos s+\cos t\cos s\end{pmatrix}$$

を得る。２点 $\mathrm{B}_2,\mathrm{C}_2$ が平面 β 上にあるので、連立された条件

$$\begin{cases} b\cos t=m(b\sin t\sin s+a) & \cdots\cdots ① \\ b\cos t-\sin t=m\{b\sin t\sin s+\cos t\sin s+a\} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たせば、折れ線 DABC は回転可能となる。

以下，この条件が存在することを示す。

①から②を辺々引き，

$\sin t=-m\cos t\sin s$ より， $\tan t=-m\sin s$

を得る。また，①に代入し

$$b\cos t=b\sin t(-\tan t)+am$$

を得る。したがって， $am=b(\cos t+\sin t\tan t)=b\left(\cos t+\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}\right)=\dfrac{b}{\cos t}$ となり，

$$t=arc\tan(-m\sin s)\quad ,\quad a=\frac{b}{m\cos t}\qquad \cdots\cdots ③$$

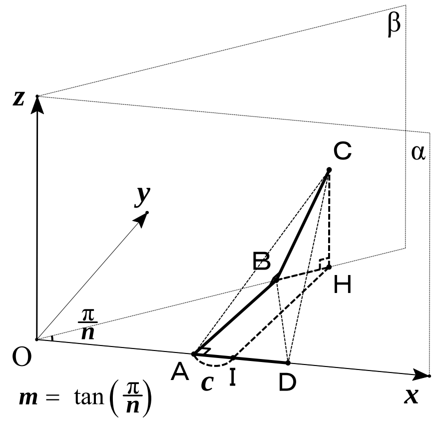
とすればよい。

b, s を与えると，③により a, t が決まる。つまり線分 AB の長さと，線分 DA の回転角 s を決め、③の条件を満たすように a, t を決めれば，常に線分 DA は平面 α に含まれ，かつ線分 BC は平面 β に含まれる。

この時，直線 AD の上の任意の（２つの）点は平面 α に含まれ，直線 BC 上の任意の任意の（２つの）点は平面 β に含まれる。したがって，このような４点を E,F,G,H と呼べは，四面体 EFGH はカライドサイクルを構成する基本四面体となる。（図１参照）

（２）一般のカライドサイクルは DA と BC が垂直である条件を必要としない。したがって、ここからは２直線 DA,BC が（一般の）ねじれの位置にあるカライドサイクルに対して計算をする。

今までの計算の中で、点 C の座標を次のよう変更するだけで、(一般の) ねじれの位置に対するカライドサイクルを計算することができる。それは、点 C を平面 β 内で z 座標を変えないような点へ平行移動すればよい。その点を新たに点 C と考える。



$$\text{以前の C}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix},\qquad \text{新たな C}=\begin{pmatrix} a+c \\ b+cm \\ 1 \end{pmatrix}$$

（※　∠BAD が直角なのに一般の条件になっているかと心配する人は，すこしよく考えて下さい。これで十分なことを。）

すると，変化する条件は，点 C を $f(\mathrm{P})$ に代入した等式

$$\mathrm{C}_2 = f(\mathrm{C}) = \begin{pmatrix} c\cos s + b\sin t\sin s + \cos t\sin s + cm\sin t\sin s + a \\ b\cos t - \sin t + cm\cos t \\ -c\sin s + b\sin t\cos s + \cos t\cos s + mc\sin t\cos s \end{pmatrix}$$

のみである。よって，②は次のようになる。

$$b\cos t - \sin t + cm\cos t = m\left(c\cos s + b\sin t\sin s + \cos t\sin s + cm\sin t\sin s + a\right)$$

先ほどと同様に差をとり，

$$\sin t - cm\cos t = -cm\cos s + m\cos t\sin s + cm^2\sin t\sin s$$

合成公式を利用できる形に変形し

$$\left(1+cm^2\sin s\right)\sin t + \left(m\sin s - cm\right)\cos t = -cm\cos s$$

ここで，$r=\sqrt{\left(1+cm^2\sin s\right)^2+\left(m\sin s-cm\right)^2}=\sqrt{\left(1+c^2m^2\right)\left(1+m^2\sin s\right)}$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{m\sin s - cm}{r}\right)$$

とおけば，$r\sin\left(t+\varphi\right) = -cm\cos s$ となり，次を得る。

$$\boxed{t=\arcsin\left(-\frac{cm\cos s}{r}\right)-\arcsin\left(\frac{m\sin s-cm}{r}\right),\quad a=b\left(\frac{\cos t}{m}-\sin t\sin s\right)}$$

参考 URL　http://horibe.jp/GrB1F.HTM#MP29　　2013/3/12 春日井東高等学校　堀部和経