各項が（等差×等比）形の級数の和の計算方法

等差数列$\{n\}$と等比数列$\{a^n\}$の項別の積の数列$\{na^n\}$の和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k=1\cdot a+2\cdot a^2+3\cdot a^3+\cdots\cdots+n\cdot a^n$$

を考えよう。

S_nの計算を説明する方法は、S_n-aS_nを考え等比数列の和と他の項の和で求めるというアイデアで説明する教科書や参考書が多い。

いまそれを、書いてみよう。

（解１）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}ka^k=1\cdot a+2\cdot a^2+3\cdot a^3+\cdots\cdots+n\cdot a^n \qquad \cdots\cdots①$$

$$aS_n=\sum_{k=1}^{n}ka^{k+1}= \qquad 1\cdot a^2+2\cdot a^3+3\cdot a^4+\cdots\cdots+n\cdot a^{n+1} \quad \cdots\cdots②$$

①−②

$$(1-a)S_n=1\cdot a+1\cdot a^2+1\cdot a^3+\cdots\cdots+1\cdot a^n-na^{n+1}$$

$$(1-a)S_n=a\cdot\frac{1-a^n}{1-a}-na^{n+1}$$

$$(1-a)S_n=\frac{a(1-a^n)-n(1-a)a^{n+1}}{1-a}$$

$$S_n=\frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}$$

（以上）

と、このような式の変形で説明している場合が多い。すると、生徒から「S_nをa倍して引く方法を見つけられなかったら、ダメなんだ。」という発言を聞くことがある。

では、これ以外にこの結果にたどり着く方法はないものなのだろうか。

この疑問に対するひとつの答えが、次である。

S_n の計算を別の方法で、そしてそれはとても素朴な方法である。それを書いてみよう。

（解２）　$S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k = 1\cdot a + 2\cdot a^2 + 3\cdot a^3 + \cdots\cdots + n\cdot a^n$

$$
\begin{aligned}
&= a + a^2 + a^3 + \cdots\cdots\cdots + a^{n-1} + a^n \\
&\quad + a^2 + a^3 + \cdots\cdots\cdots + a^{n-1} + a^n \\
&\quad\quad + a^3 + \cdots\cdots\cdots + a^{n-1} + a^n \\
&\quad\quad\quad + \cdots\cdots\cdots + \\
&\quad\quad\quad\quad + a^{n-1} + a^n \\
&\quad\quad\quad\quad\quad + a^n
\end{aligned}
$$

第２項以降を、それぞれの係数分だけ分けて、各行に書いていく。すると、各行それぞれが等比数列となるので、次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
S_n &= a\cdot\frac{1-a^n}{1-a} + a^2\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-a} + a^3\cdot\frac{1-a^{n-2}}{1-a} + \cdots + a^{n-1}\cdot\frac{1-a^2}{1-a} + a^n\cdot\frac{1-a}{1-a} \\
&= \frac{1}{1-a}\cdot\left(a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} + a^n - n\cdot a^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-a}\cdot\left(a\cdot\frac{1-a^n}{1-a} - n\cdot a^{n+1}\right) \\
&= \frac{a-(n+1)a^{n+1}+na^{n+2}}{(1-a)^2}
\end{aligned}
$$

と、最終結論を得た。

（解１）は、元の式を a 倍し、元の式から引くという、アイデアで、その本質に迫る解答であると思う。しかし（解２）の方法は、等比数列の和を求めることを、ただ何度も繰り返すという方法で和を得ている。その意味で、シンプルな方法であると思う。

教壇で、生徒から「その他の解答」を要求されたり、あるいは、「数学は自由であり、どんな問題にも様々な方法でアプローチできる場合がある」という考えのサンプルのひとつにどうだろう。

愛知県立春日井東高等学校　　堀部　和経（　ほりべ　かずのり　）　2009 / 6 / 25