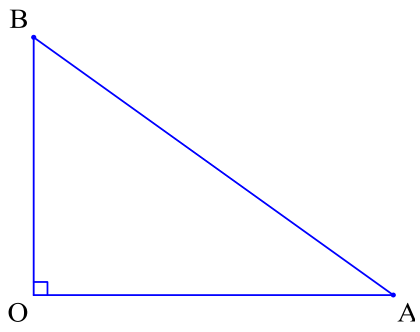
四面体の四平方の定理等



右の直角三角形 OAB では，

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

であり，$\angle AOB = \theta$ である三角形 OAB ならば，

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\,OA \cdot OB \cdot \cos\theta$$

であった。

［四平方の定理］

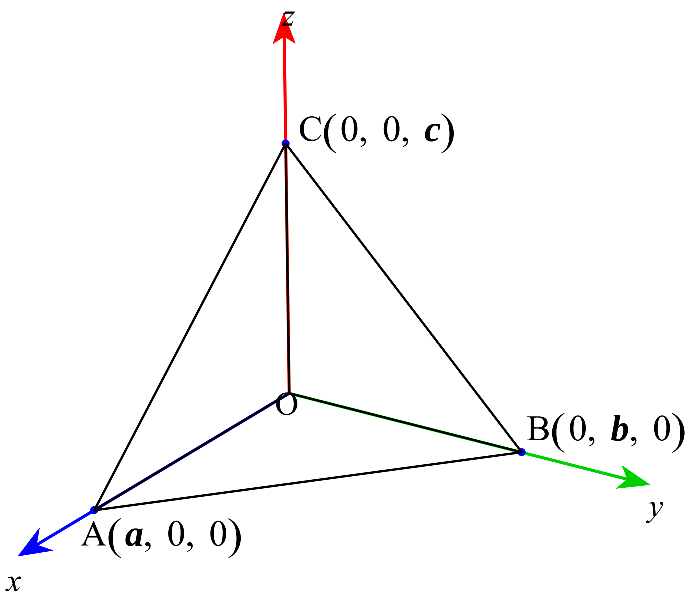
さて，頂点Oに集まる角がすべて 90° となっている四面体 OABC を考える。このとき，

$$\triangle ABC^2 = \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$$

である。

［証明］　右の図のように４点 O,A,B,C の座標を定める。

いま，$a>0, b>0, c>0$ としてよい。すると，



$$\triangle OAB = \frac{1}{2}ab$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2}bc$$

$$\triangle OCA = \frac{1}{2}ca$$

となる。次に△ABC の面積を求める。

$$\overrightarrow{AB} = (-a,\ b,\ 0),\quad \overrightarrow{AC} = (-a,\ 0,\ c)$$

となるので，

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc,\ ca,\ ab)$$

したがって，

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

よって，

$$\triangle ABC^2 = \frac{1}{4}\left(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 + \left(\frac{1}{2}bc\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ca\right)^2$$

$$= \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$$

［証明終り］

［参考文献］　幾何学大事典　２巻　P150　［123］　Descartes, Gua

［余弦定理］

ここまでは，頂角に集まる３つの角がすべて直角の場合を考えてきました。この「直角」という条件を外したらどうなるのか，つまり一般の四面体 OABC について考えることにします。

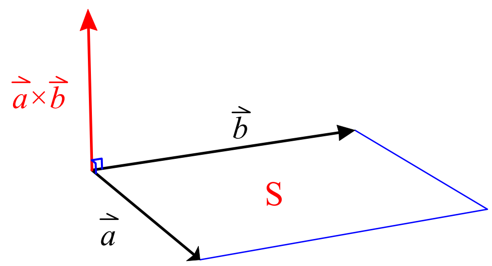
その前に，３次元のベクトルの外積 ”×” などに関係する等式を簡単に確認します。

◎ $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ とする。

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$ ， $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ ， $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ ， $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ ， $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

◎ $\vec{a}\times\vec{b}$ の図形的意味



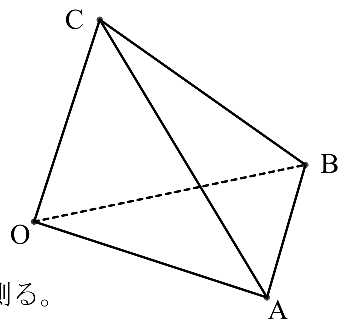
$\vec{a}\times\vec{b}$ の向きは，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へベクトルを回転させるとき，右ネジの進む向きと同じ。

その長さ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積 S と同じである。$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=$S

四面体の余弦定理

四面体 OABC に対して，

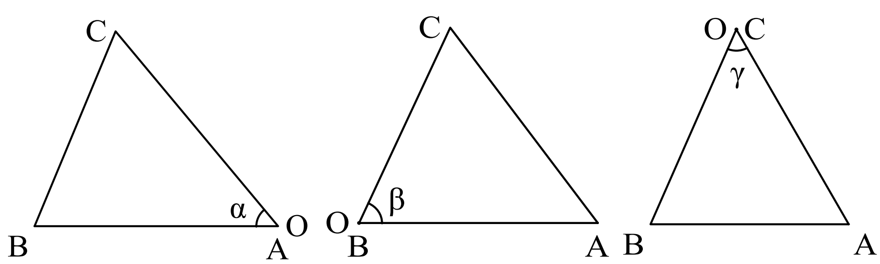
$$\triangle\mathrm{ABC}^2=\triangle\mathrm{OBC}^2+\triangle\mathrm{OCA}^2+\triangle\mathrm{OAB}^2$$
$$-2\triangle\mathrm{OCA}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\cos\alpha$$
$$-2\triangle\mathrm{OAB}\cdot\triangle\mathrm{OBC}\cdot\cos\beta$$
$$-2\triangle\mathrm{OBC}\cdot\triangle\mathrm{OCA}\cdot\cos\gamma$$



但し，角 α,β,γ は，次の面角である。

α は△OCA と△OAB とのなす角であり，四面体の内側を測る。

同様に，β は△OAB と△OBC とのなす角，γ は△OBC と△OCA とのなす角である。



【角 α,β,γ の説明図：点 O 側からもう１つの点が重なって見える位置から見た概念図】

［証明］

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right|$$

であるから，

$$\triangle\mathrm{ABC}^2 = \frac{1}{4}\left|\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{a}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right|^2$$

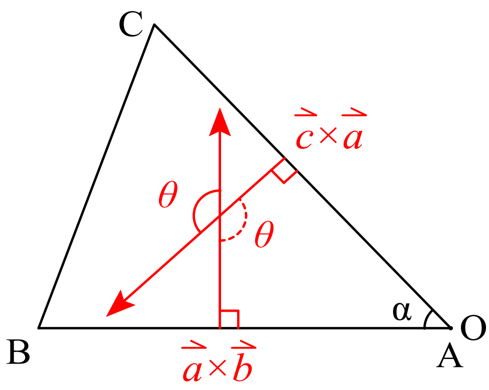
$$= \frac{1}{4}\left\{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|^2+\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|^2\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\bullet\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right\}$$

$$= \triangle\mathrm{OAB}^2+\triangle\mathrm{OBC}^2+\triangle\mathrm{OCA}^2+\frac{1}{2}\left\{\quad \mathit{same} \quad\right\}$$

さて，

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\cos\theta$$



（但し，θ はベクトル $\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}$ のなす角である。）

△OCA の法線ベクトルは $\vec{c}\times\vec{a}$ と平行であり，△OAB の法線ベクトルは $\vec{a}\times\vec{b}$ と平行である。このことから，

$$\theta = \pi-\alpha$$

である。（面角の定義から，角 α は四面体の内側を測る。）

$$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\pi-\alpha\right)$$

$$= -\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$= -4\,\triangle\mathrm{OCA}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\cos\alpha$$

同様に，

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = -4\,\triangle\mathrm{OAB}\cdot\triangle\mathrm{OBC}\cdot\cos\beta$$

$$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\bullet\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) = -4\,\triangle\mathrm{OBC}\cdot\triangle\mathrm{OCA}\cdot\cos\gamma$$

［証明終わり］

【補足】頂点 O に集まる 3 つの角がすべて直角である四面体は，$\alpha=\beta=\lambda=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\triangle\mathrm{ABC}^2 = \triangle\mathrm{OAB}^2+\triangle\mathrm{OBC}^2+\triangle\mathrm{OCA}^2$$

となることは，この証明からも明らかである。

堀部 和経 2018/1/15

※ この余弦定理，キレイですね。きっと誰か解いていますよね。知ってますか？ 教えて！

と書きましたが、・・・。一般の n 次元空間での余弦定理がありました。1/28