

四面体の四平方の定理等

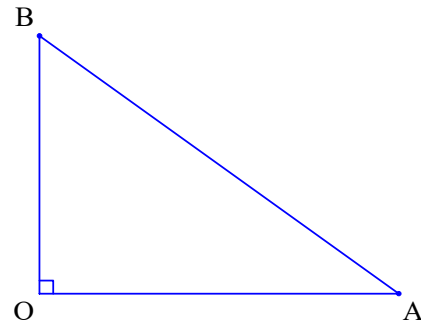
右の直角三角形 OAB では、

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

であり、 $\angle AOB = \theta$ である三角形 OAB ならば、

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 OA \cdot OB \cdot \cos \theta$$

であった。



[四平方の定理]

さて、頂点 O に集まる角がすべて 90° となっている四面体 OABC を考える。このとき、

$$\triangle ABC^2 = \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$$

である。

[証明] 右の図のように 4 点 O, A, B, C の座標を定める。

いま、 $a > 0, b > 0, c > 0$ としてよい。すると、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} ab$$

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} bc$$

$$\triangle OCA = \frac{1}{2} ca$$

となる。次に $\triangle ABC$ の面積を求める。

$$\overline{AB} = (-a, b, 0), \quad \overline{AC} = (-a, 0, c)$$

となるので、

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = (bc, ca, ab)$$

したがって、

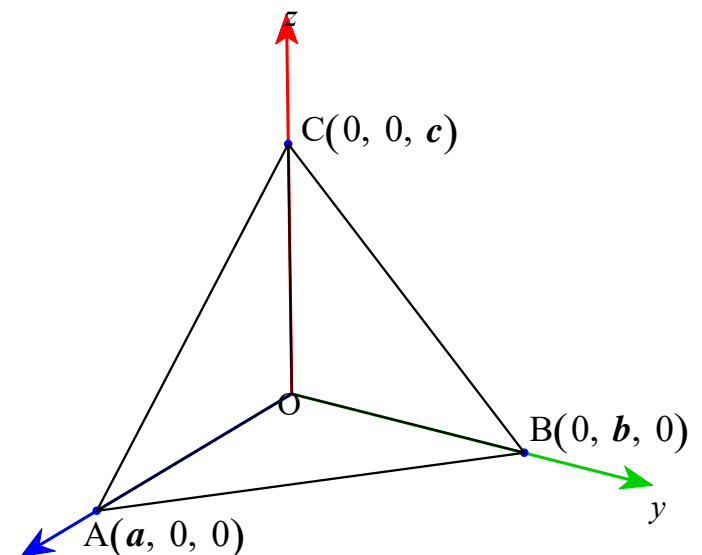
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}$$

よって、

$$\triangle ABC^2 = \frac{1}{4} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)$$

$$= \left(\frac{1}{2} ab \right)^2 + \left(\frac{1}{2} bc \right)^2 + \left(\frac{1}{2} ca \right)^2$$

$$= \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$$



[証明終り]

[参考文献] 幾何学大事典 2巻 P150 [123] Descartes, Gua

[余弦定理]

ここまでは、頂角に集まる3つの角がすべて直角の場合を考えてきました。この「直角」という条件を外したらどうなるのか、つまり一般の四面体 $OABC$ について考えることにします。

その前に、3次元のベクトルの外積 "×" などに関する等式を簡単に確認します。

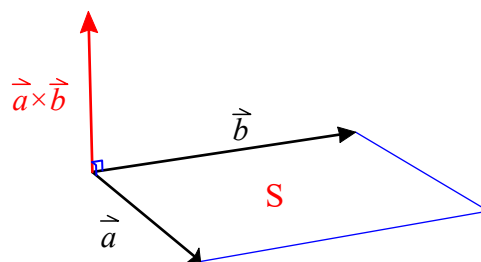
◎ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ とする。

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

◎ $\vec{a} \times \vec{b}$ の図形的意味

$\vec{a} \times \vec{b}$ の向きは、 \vec{a} から \vec{b} へベクトルを回転させるとき、右ネジの進む向きと同じ。

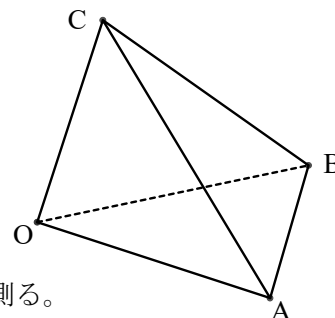


その長さ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は、 \vec{a} と \vec{b} で張られる平行四辺形の面積 S と同じである。 $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$

四面体の余弦定理

四面体 $OABC$ に対して、

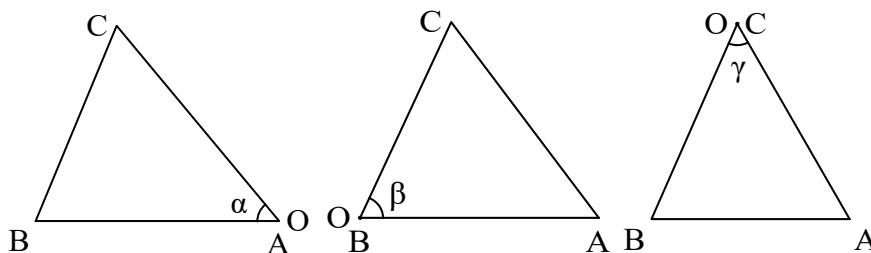
$$\begin{aligned} \triangle ABC^2 &= \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2 + \triangle OAB^2 \\ &\quad - 2 \triangle OCA \cdot \triangle OAB \cdot \cos \alpha \\ &\quad - 2 \triangle OAB \cdot \triangle OBC \cdot \cos \beta \\ &\quad - 2 \triangle OBC \cdot \triangle OCA \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$



但し、角 α, β, γ は、次の面角である。

α は $\triangle OCA$ と $\triangle OAB$ とのなす角であり、四面体の内側を測る。

同様に、 β は $\triangle OAB$ と $\triangle OBC$ とのなす角、 γ は $\triangle OBC$ と $\triangle OCA$ とのなす角である。



【角 α, β, γ の説明図：点 O 側からもう1つの点が重なって見える位置から見た概念図】

[証明]

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} |(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})|$$

であるから,

$$\begin{aligned} \triangle ABC^2 &= \frac{1}{4} |(\overline{b} - \overline{a}) \times (\overline{c} - \overline{a})|^2 = \frac{1}{4} |\overline{b} \times \overline{c} - \overline{b} \times \overline{a} - \overline{a} \times \overline{c} + \overline{a} \times \overline{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{c} \times \overline{a}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ |\overline{a} \times \overline{b}|^2 + |\overline{b} \times \overline{c}|^2 + |\overline{c} \times \overline{a}|^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) + (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) + (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) \right\} \\ &= \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2 + \frac{1}{2} \{ \text{same} \} \end{aligned}$$

さて,

$$(\overline{c} \times \overline{a}) \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = |\overline{c} \times \overline{a}| \cdot |\overline{a} \times \overline{b}| \cdot \cos \theta$$

(但し, θ はベクトル $\overline{c} \times \overline{a}$, $\overline{a} \times \overline{b}$ のなす角である。)

$\triangle OCA$ の法線ベクトルは $\overline{c} \times \overline{a}$ と平行であり, $\triangle OAB$ の法線ベクトルは $\overline{a} \times \overline{b}$ と平行である。このことから,

$$\theta = \pi - \alpha$$

である。(面角の定義から, 角 α は四面体の内側を測る。)

$$\begin{aligned} (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) &= |\overline{c} \times \overline{a}| \cdot |\overline{a} \times \overline{b}| \cdot \cos(\pi - \alpha) \\ &= -|\overline{c} \times \overline{a}| \cdot |\overline{a} \times \overline{b}| \cdot \cos \alpha \\ &= -4 \triangle OCA \cdot \triangle OAB \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

同様に,

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = -4 \triangle OAB \cdot \triangle OBC \cdot \cos \beta$$

$$(\overline{b} \times \overline{c}) \cdot (\overline{c} \times \overline{a}) = -4 \triangle OBC \cdot \triangle OCA \cdot \cos \gamma$$

[証明終わり]

【補足】 頂点 O に集まる 3 つの角がすべて直角である四面体は, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\triangle ABC^2 = \triangle OAB^2 + \triangle OBC^2 + \triangle OCA^2$$

となることは, この証明からも明らかである。

堀部 和経 2018/1/15

※ この余弦定理, キレイですね。きっと誰か解いていますよね。知ってますか? 教えて!

