[2.5]　二項分布 $B(n, p)$ の平均と分散は

$$\text{平均}\quad \mu = E(X) = np$$

$$\text{分散}\quad \sigma^2 = V(X) = npq = np(1-p)$$

証明

事象 A について $P(A) = p$ であり，A が起こったとき 1，起こらないとき 0 である確率変数を X とする．$q = 1 - p$ として

$$P(X = 1) = P(A) = p, \quad P(X = 0) = P(\overline{A}) = q$$

である．X の平均と分散は

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$V(X) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq$$

この試行を独立に n 回くり返し，i 回目の試行を表す確率変数を X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とするとき，和

$$W = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

は事象 A が起こる回数を表す確率変数である．したがって，これは二項分布 $B(n, p)$ を与える．$E(X_i) = E(X) = p$，$V(X_i) = V(X) = pq$ であるから

$$E(W) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

$$V(W) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = npq$$

終