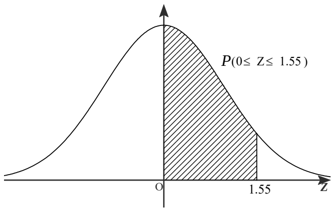
第 12 回は、特にしっかり・ゆっくり・じっくりと読み込む事が大切。

［問題 4.1］　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

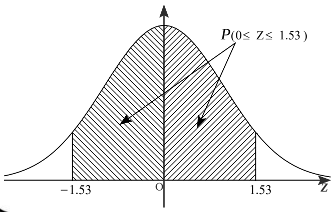
(1)　$P(0 \le Z \le 1.55)$　　(2)　$P(-1.53 \le Z \le 1.53)$

(3)　$P(0.52 \le Z \le 1.57)$　　(4)　$P(-1.47 \le Z \le 1.83)$

［解答 4.1］　正規分布表から求める数値を選んで利用する。



(1)　$P(0 \le Z \le 1.55) = \underline{0.4394}$



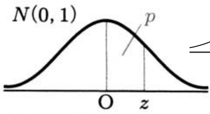
(2)　$P(-1.53 \le Z \le 1.53) = 2 \times P(0 \le Z \le 1.53)$

$$= 2 \times \underline{\underline{0.4370}} = 0.8740$$

標準正規分布表

※一部のみ表示

$$z \longrightarrow p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

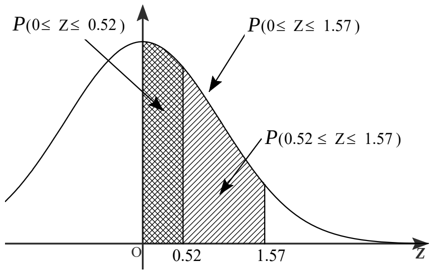


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441

(3)　$P(0.52 \le Z \le 1.57)$

$= P(0 \le Z \le 1.57) - P(0 \le Z \le 0.52)$

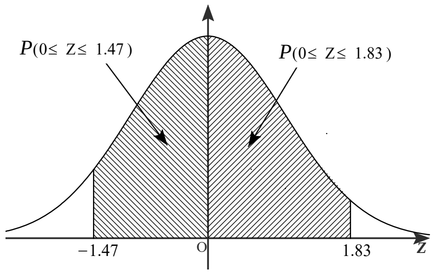
$= \underline{\underline{0.4418}} - \underline{0.1985} = 0.2433$



(4)　$P(-1.47 \le Z \le 1.83)$

$= P(0 \le Z \le 1.47) + P(0 \le Z \le 1.83)$

$= \underline{\underline{0.4292}} + \underline{\underline{0.4664}} = 0.8956$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706

［問題 4.2］　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、次の条件を満たす λ の値を求めよ。

(1)　$P(0 \le Z \le \lambda) = 0.4049$　　(2)　$P(-\lambda \le Z \le \lambda) = 0.99$

(3)　$P(Z \ge \lambda) = 0.025$　　(4)　$P(Z \le \lambda) = 0.025$

［証明 4.2］(1)　$P(0 \le Z \le \lambda) = 0.4049$

正規分布表から、$\lambda = 1.31$

z	.00	.01	.02	.03	.04
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925
1.3	.4032	$\boxed{.4049}$	.4066	.4082	.4099
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251

(2)　$P(-\lambda \le Z \le \lambda) = 0.99$

$$2P(0 \le Z \le \lambda) = 0.99$$

$$P(0 \le Z \le \lambda) = 0.495$$

正規分布表から、$\lambda = 2.58$

z	.06	.07	.08	.09
2.5	.4948	.4949	$\boxed{.4951}$	.4952
2.6	.4961	.4962	.4963	.4964

(3)　$P(Z \ge \lambda) = 0.025$

$$P(0 \le Z \le \lambda) = 0.5 - 0.025 = 0.475$$

正規分布表から、$\lambda = 1.96$

z	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4738	.4744	$\boxed{.4750}$	.4756	.4761	.4767

(4)　$P(Z \le \lambda) = 0.025$ より $P(Z \ge -\lambda) = 0.025$ となる。

(3)の結果より $-\lambda = 1.96$ であるから、$\lambda = -1.96$ となる。

［問題 4.3］　確率変数 X が正規分布 $N(5,\ 2^2)$ に従うとき、次の条件を求めよ。

(1)　$P(6 \le X \le 9)$　　(2)　$P(3 \le X \le 8)$　　(3)　$P(X \le 10)$

［解答 4.3］　確率変数 X が正規分布 $N(5,\ 2^2)$ に従うので、標準化変換は、

$$Z = \frac{X-5}{2}$$

である。したがって、

(1)　$P(6 \le X \le 9) = P\left(\frac{6-5}{2} \le Z \le \frac{9-5}{2}\right) = P(0.5 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 2) - P(0 \le Z \le 0.5)$　　（問題［4.1］(3)参照）

$= 0.4772 - 0.1915 = 0.2857$

(2)　$P(3 \le X \le 8) = P\left(\frac{3-5}{2} \le Z \le \frac{8-5}{2}\right) = P(-1 \le Z \le 1.5)$

$$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1.5)$$　（問題［4.1］(4)参照）

$$= 0.3413 - 0.4332 = 0.7745$$

(3)　$P(X \le 10) = P\left(Z \le \dfrac{10-5}{2}\right) = P(Z \le 2.5) = 0.5 + P(0 \le Z \le 2.5)$

$$= 0.5 + 0.4938 = 0.9938$$

（正誤メモ）p. 112 問題 4. 3 の解答のカギ括弧内の解説の数値に誤りあり。

［問題 4.4］　例題 4.2 の試験の場合（とあるので、例題を再掲し、設問を続ける）

［例題 4.2］　ある試験を 30000 人の受験生が受けた、100 点満点のところ平均点が 63.6、標準偏差が 13.4 であり、点数の分布はほぼ正規分布であった。

(1)　90 点、70 点、50 点の受験者は約何番か

(2)　5000 番、10000 番、24000 番の得点は約何点か

［解答 4.4］　得点を表す確率変数を X とする。受験者が 30000 人と多く、平均点、標準偏差もわかっていて、その分布はほぼ正規分布に従うことから、分布は $N(63.6,\ 13.4^2)$ と考えてよい。したがって、標準化変換は、次の通りである。

$$Z = \frac{X - 63.6}{13.4}$$

また、この変換の逆は、$X = 13.4 \times Z + 63.6$ である。

(1)の 3 つの設問に順に答える。まず、90 点の順位を調べる。

$$P(X \ge 90) = P\left(Z \ge \frac{90-63.6}{13.4}\right) = P(Z \ge 1.97)$$

$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1.97) = 0.5 - 0.4756 = 0.0224$$

受験者数は 30000 人なので、$30000 \times 0.0204 = 732$ となる。90 点は、約 730 番である。

次に 70 点の順位は、

$$P(X \ge 70) = P\left(Z \ge \frac{70-63.6}{13.4}\right) = P(Z \ge 0.48)$$

$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 0.48) = 0.5 - 0.1844 = 0.3156$$

受験者数は 30000 人なので、$30000 \times 0.3156 = 9468$ となる。70 点は、約 9500 番である。

さらに、50 点の順位は、

$$P(X \ge 50) = P\left(Z \ge \frac{50-63.6}{13.4}\right) = P(Z \ge -1.01)$$

$$= 0.5 + P(0 \le Z \le 1.01) = 0.5 + 0.3438 = 0.8438$$

受験者数は 30000 人なので、$30000 \times 0.8438 = 25350$ となる。50 点は、約 25350 番である。

(2)の 3 つの設問に順に答える。まず、5000 番の相対度数は$\dfrac{5000}{30000}=0.167$であり、その偏差を$b_1$とすると、$0.167=P\left(Z\geq b_1\right)=0.5-P\left(0\leq Z\leq b_1\right)$となる。

したがって、$P\left(0\leq Z\leq b_1\right)=0.333$であるから、正規分布表から$b_1=0.97$を得る。

$$X=13.4b_1+63.6=13.4\times0.97+63.6=76.598$$

となるので、5000 番の得点は約 77 点である。

次に、10000 番の相対度数は$\dfrac{10000}{30000}=0.333$であり、その偏差を$b_2$とすると、$0.333=P\left(Z\geq b_2\right)=0.5-P\left(0\leq Z\leq b_2\right)$となる。

したがって、$P\left(0\leq Z\leq b_2\right)=0.167$であるから、正規分布表から$b_2=0.43$を得る。

$$X=13.4b_2+63.6=13.4\times0.43+63.6=69.362$$

となるので、10000 番の得点は約 69 点である。

さらに、24000 番の相対度数は$\dfrac{24000}{30000}=0.8$で、その偏差をb_3とすると、0.8は0.5よ大きいことから、

$$P\left(0\leq Z\leq -b_3\right)=0.8-0.5=0.3$$

となり、正規分布表から$-b_3=0.84$、つまりを$b_3=-0.84$得る。

$$X=13.4b_3+63.6=13.4\times\left(-0.84\right)+63.6=52.344$$

となるので、24000 番の得点は約 52 点である。

● 第１２回の講義の出席確認用問題

教科書 p.74 練習問題４の

［１］確率変数Ｚが標準正規分布Ｎ(0,1)に従うとき、

ではじまる問題１を解いて、画像データのファイルに変換しメールに添付し提出する事。

メールアドレス　kazunori@horibe.jp
タイトルは『大同大・確率統計、「学籍番号」、「氏名」』と明記すること。
〆切は基準の日程（木曜・午後の講義計画）の直後の日曜日の正午（12:00）までとします。