［問題 2.7］　二項分布 $B(10,\ 0.5)$、$B(5,\ 0.2)$ の確率分布表とヒストグラムを作れ。

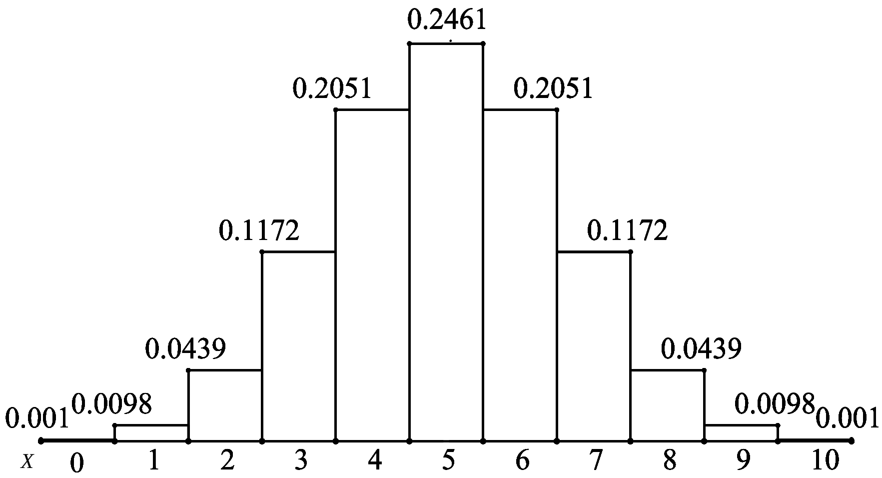
［解答 2.7］　まず、$B(10,\ 0.5)$ の確率 p_r は、次である。

$$p_r = {}_{10}C_r (0.5)^r (0.5)^{10-r} = \frac{10!}{r!\cdot(10-r)!\cdot 2^{10}}$$

これを具体的に計算して、

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
確率	.0010	.0098	.0439	.1172	.2051	.2461	.2051	.1172	.0439	.0098	.0010

となる。ヒストグラムは下図である。

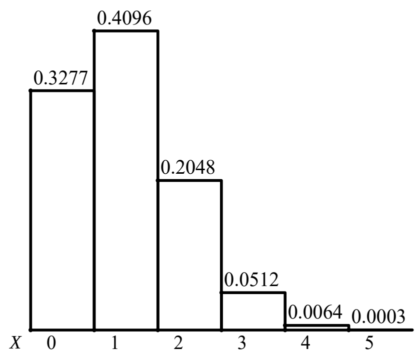


次に、$B(5,\ 0.2)$ の確率 p_r は

$$p_r = {}_{5}C_r (0.2)^r (0.8)^{5-r} = \frac{5!\cdot 2^{10-2r}}{r!\cdot(5-r)!\cdot 5^5}$$

となり、これを計算する。次が表とヒストグラムである。

X	0	1	2	3	4	5
確率	.3227	.4096	.2048	.0512	.0064	.0003



［問題 2.8］　二項分布 $B(2,\ p)$ の平均と分散について次の式を示せ。

$$E(X) = 2p,\quad V(X) = 2pq \quad (q = 1 - p)$$

［証明 2.8］

$$P(X) = {}_2C_X\, p^X q^{2-X} \quad (q = 1 - p)$$

であるから、確率分布表は右の様になる。したがって、

X	0	1	2
確率	q^2	$2pq$	p^2

$$E(X) = 0\cdot q^2 + 1\cdot 2pq + 2\cdot p^2 = 2p(p+q) = 2p \quad \text{（平均）}$$

$$E\left(X^2\right)=0^2\cdot q^2+1^2\cdot 2pq+2^2\cdot p^2=2pq+4p^2$$

であるから、

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2=\left(2pq+4p^2\right)-\left(2p\right)^2=2pq$$ （分散）　［証明終わり］

［問題 2.9］　次の二項分布に従う確率変数の平均と分散を求めよ。

(1)　$B(10, 0.5)$　(2)　$B(5, 0.2)$　(3)　$B(100, 0.1)$

［解答 2.9］　(1)　$E\left(X\right)=10\times 0.5=5$ （平均）

$\sigma^2=V\left(X\right)=10\times 0.5\times\left(1-0.5\right)=2.5$ （分散）

(2)　$E\left(X\right)=5\times 0.2=1$ （平均）

$\sigma^2=V\left(X\right)=5\times 0.2\times\left(1-0.2\right)=0.8$ （分散）

(3)　$E\left(X\right)=100\times 0.1=10$ （平均）

$\sigma^2=V\left(X\right)=100\times 0.1\times\left(1-0.1\right)=9$ （分散）

［問題 2.10］　白球 6 個と赤球 4 個が入っている箱から 1 個の球を取り出し、色を調べて箱に戻す。この試行を 5 回行ったとき、赤球の出た回数 X の平均・分散・標準偏差を求めよ。また、500 回行った場合はどうか。

［解答 2.10］　（試行が 5 回の場合）　二項分布 $B\left(5, 0.4\right)$ に従うから、

$E\left(X\right)=5\times 0.4=2$ （平均）

$\sigma^2=V\left(X\right)=5\times 0.4\times\left(1-0.4\right)=1.2$ （分散）

$\sigma=\sqrt{1.2}=1.095$ （標準偏差）

（試行が 500 回の場合）　二項分布 $B\left(500, 0.4\right)$ に従うから、

$E\left(X\right)=500\times 0.4=200$ （平均）

$\sigma^2=V\left(X\right)=500\times 0.4\times\left(1-0.4\right)=120$ （分散）

$\sigma=\sqrt{120}=10.95$ （標準偏差）

付録　　第10回　二項分布（P. 35 L. 1 から L. 3）

定理[2. 5]を直接計算することで証明する。
（参考）　教科書(P. 40 下段)に、別の手法の証明が記載されている。

> **二項定理** $B(n, p)$ の一般の n と p に対して、次が成り立つ
>
> 平均　$\mu = E(X) = np$,　　分散　$\sigma^2 = V(X) = npq$　但し $p+q=1$

［メモ］　平均の記号は、$m, \mu, \overline{X}, E(X)$ など様々あるので注意。

［証明］　確率分布関数は、$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$　$(q = 1-p)$ であるから、

$$m = \mu = E(X) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot P(r) = \sum_{r=0}^{n} r\, {}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=\underline{1}}^{n} r\, {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

となる。最後の変形は $r=0$ に関する項は 0 であることから、$r=0$ を $r=1$ と変形できる。
　さて、$1 \le r \le n$ の場合、

$$r\, {}_nC_r = r \cdot \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!} = \underline{n\, {}_{n-1}C_{r-1}}$$

であるので、

$$m = \sum_{r=\underline{1}}^{n} r\, {}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=1}^{n} \underline{n\, {}_{n-1}C_{r-1}}\, p^r q^{n-r}$$

$$= np \sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1} p^{r-1} q^{n-r} = np \sum_{\underline{s}=0}^{n-1} {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} \qquad (\because\ r-1 = \underline{s})$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \ \text{（平均）} \qquad (\because\ p+q=1)$$

　次に、$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ である。先に、$E(X^2)$ を計算する。

$$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2\, {}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \{r(r-1) + r\}\, {}_{n-1}C_{r-1} p^r q^{n-r}$$

$$= \underbrace{\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\, {}_nC_r p^r q^{n-r}}_{\text{（第１項）}} + \underbrace{\sum_{r=0}^{n} r\, {}_nC_r p^r q^{n-r}}_{\text{（第２項）}}$$

となる。

　この（第２項）は、$E(X) = np$ に他ならない。

以下、（第１項）を計算する。

$$（第１項）=\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r}=\sum_{r=\underline{2}}^{n} r(r-1)\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r}$$

となる。この変形は$r=0,1$に関する項は0であることから、$r=0$を$r=2$と変形できる。

さて、$2\le r\le n$の場合、

$$r(r-1)\,{}_nC_r=r(r-1)\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}=n(n-1)\frac{(n-2)!}{(n-r)!\cdot(r-2)!}=\underline{n(n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2}}$$

$$（第１項）=\sum_{r=\underline{2}}^{n} r(r-1)\,{}_nC_r\,p^r q^{n-r}=\sum_{r=2}^{n}\underline{n(n-1)\,{}_{n-2}C_{r-2}}\,p^r q^{n-r}$$

$$=n(n-1)\,p^2\sum_{r=2}^{n}{}_{n-2}C_{r-2}\,p^{r-2}q^{n-r}$$

$$=n(n-1)\,p^2\sum_{s=\underline{0}}^{n-2}{}_{n-2}C_s\,p^s q^{n-r}\qquad(\because\ r-2=\underline{s})$$

$$=n(n-1)\,p^2(p+q)^{n-2}=n(n-1)\,p^2\qquad(\because\ p+q=1)$$

したがって、

$$E\left(X^2\right)=n(n-1)\,p^2+np=n^2p^2-np^2+np$$

$$\sigma^2=V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=\left(n^2p^2-np^2+np\right)-(np)^2$$

$$=np(1-p)=npq$$ （分散）　　［証明終わり］

● 第１０回の講義の出席確認用問題

教科書 p.41 練習問題２の

［５］数直線上で、点Ｐが初め原点にあり、

ではじまる問題５を解いて、画像データのファイルに変換しメールに添付し提出する事。

メールアドレス　kazunori@horibe.jp

タイトルは『大同大・確率統計、「学籍番号」、「氏名」』と明記すること。

〆切は基準の日程（木曜・午後の講義計画）の直後の日曜日の正午（12:00）までとします。