標準正規分布曲線の下の面積（高校生に向けて）

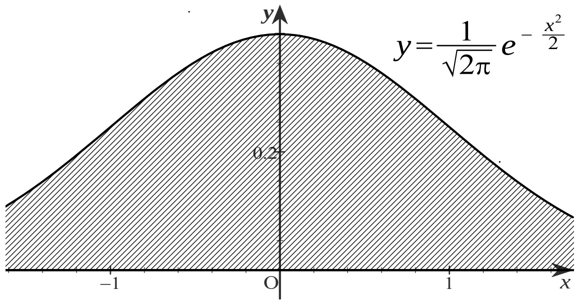
堀部　和経

堀部数学模型研究所代表，大同大学・愛知県立春日井東高等学校・ＮＳＭ&Ｄ非常勤講師

２０２０／１１

この面積は1であることを、高校生に向けて証明する。

§１　$\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ・・・①



⇒　$\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ ・・・②　を示す。

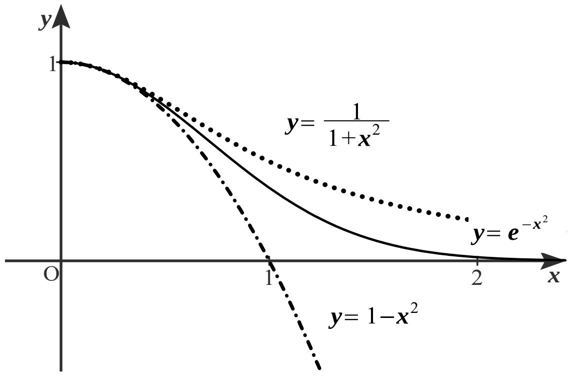
［証明］　$x=\sqrt{2}\,u$ と置換すると、$\dfrac{dx}{du}=\sqrt{2}$ であり、$x:-\infty \to \infty$ のとき $u:-\infty \to \infty$ なので、

$$（①の左辺）=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\, e^{-\frac{\left(\sqrt{2}\,u\right)^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \qquad ■$$

以下、$\displaystyle I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ とおき、順を追って $\displaystyle I=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ・・・①を証明する。

§２　$1-x^2 < e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ 　（$x>0$）・・・③



［証明］　$F\left(x\right)=e^{-x^2}-\left(1-x^2\right)$ とおくと、

$F\left(0\right)=e^0-1=0$ であり、

$F'\left(x\right)=-2xe^{-x^2}+2x=2x\left(1-e^{-x^2}\right)=2x\dfrac{e^{x^2}-1}{e^{x^2}}>0$　なので、$F\left(x\right)>0$　となる。

次に、$e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 + x^2$ であるから、$G(x) = e^{x^2} - \left(1 + x^2\right)$ とおくと、

$G(0) = e^0 - 1 = 0$ であり、

$G'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right) > 0$　なので、　$G(x) > 0$　となる。　■

§３　　③により　$\boxed{\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx < \int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx < \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} \quad \cdot\cdot\cdot ④}$　となっている。

ここで、$\underline{S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx}$　とおき、各辺（左辺、右辺、中辺）の値を計算する。

（A）まず、$x = \cos\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta,\ 1 - x^2 = \sin^2\theta$ 、$x : 0 \to 1$ のとき $\theta : \dfrac{\pi}{2} \to 0$ なので、

$$\text{（左辺）} = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\theta\left(-\sin\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta = S_{2n+1}$$

（B）次に、$x = \dfrac{1}{\tan\theta}$ とおき、$\dfrac{dx}{d\theta} = -\dfrac{1}{\sin^2\theta}$, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sin^2\theta$ 、$x : 0 \to \infty$ のとき $\theta : \dfrac{\pi}{2} \to 0$ なので、

$$\text{（右辺）} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{2n}\theta\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\theta\,d\theta = S_{2n-2}$$

（C）さらに、$\sqrt{n}\,x = t$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $nx^2 = t^2$ 、$x : 0 \to \infty$ のとき $t : 0 \to \infty$ なので、

$$\text{（中辺）} = \int_0^\infty e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{n}}I$$

これらを不等式④に代入し、　$S_{2n+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}I < S_{2n-2}$

したがって、

$$\boxed{\sqrt{n}\,S_{2n+1} < I < \sqrt{n}\,S_{2n-2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑤}$$

を得る。

§４　$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$　に関係する幾つかの等式および不等式などを計算する。

まず、$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1,\quad S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2}$ である。

また、$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n-1}x\,dx=\left[-\cos x\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,dx$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2}x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

$$=(n-1)S_{n-2}-(n-1)S_n \qquad (\ n\geq 2\ )$$

これを整理し、$S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ となる。

したがって、$\boxed{S_{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}S_{2n-1},\quad S_{2n}=\dfrac{2n-1}{2n}S_{2n-2}}$ となり、それぞれ順次添数を下げ、

$$S_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 \qquad \text{（最後の因数は、}S_1=1\text{）}$$

$$S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{（最後の因数は、}S_0=\frac{\pi}{2}\text{）}$$

これらの積をとり、

$$S_{2n+1}S_{2n}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\qquad n\cdot {S_{2n+1}}^2=\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

さらに、両辺の正の平方根をとると、

$$\boxed{\sqrt{n}\,S_{2n+1}=\sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}}\quad\cdot\cdot\cdot⑥}$$

となる。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$0<\sin x<1$ なので、$\sin^{2n-1}x>\sin^{2n}x>\sin^{2n+1}x\ (>0)$ である。

$$\therefore\qquad S_{2n-1}>S_{2n}>S_{2n+1}\ (>0)\qquad\qquad \therefore\qquad \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}>\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}}>1$$

ここで、（左辺）$=\dfrac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}}=\dfrac{S_{2n-1}}{\dfrac{2n}{2n+1}S_{2n-1}}=\dfrac{2n+1}{2n}=1+\dfrac{1}{2n}\quad\cdot\cdot\cdot⑦$　となる。

§５　最後に、$n \to \infty$ とすると、⑦, ⑥より

$$\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \to 1 \qquad \therefore \quad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \to 1 \qquad \therefore \quad \frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \to 1$$

となるから、

$$(⑤の左辺) = \sqrt{n}\, S_{2n+1} = \sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2}} \to \sqrt{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

また、

$$(⑤の右辺) = \sqrt{n}\, S_{2n-2} = \sqrt{n}\, S_{2n} \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$= \sqrt{n}\, S_{2n+1} \cdot \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \cdot \frac{2n}{2n-1} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

したがって、不等式 ⑤ で、はさみうちの原理により、

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る。

［参考文献］　小針晛宏著「確率・統計入門」岩波書店（1973）