付録　　**二項分布**（P.35 L.1 から L.3）

○ P.35 の定理[2.5]を直接計算する手法で証明する。

> **二項定理** $B(n,\ p)$ の一般の $n$ と $p$ に対して、次が成り立つ
>
> 平均　$\mu = E(X) = np$,　　分散　$\sigma^2 = V(X) = npq$　但し $p+q=1$

［メモ］　平均の記号は、$m,\ \mu,\ \overline{X},\ E(X)$ など様々あるので注意。

［証明］　確率分布関数は、$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$　$(q = 1-p)$ であるから、

$$m = \mu = E(X) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot P(r) = \sum_{r=0}^{n} r\,{}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{\underline{r=1}}^{n} r\,{}_nC_r p^r q^{n-r}$$

となる。最後の変形は $r=0$ に関する項は $0$ であることから、$r=0$ を $r=1$ と変形できる。
　さて、$1 \le r \le n$ の場合、

$$r\,{}_nC_r = r \cdot \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)! \cdot (r-1)!} = \underline{n\,{}_{n-1}C_{r-1}}$$

であるので、

$$m = \sum_{\underline{r=1}}^{n} r\,{}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=1}^{n} \underline{n\,{}_{n-1}C_{r-1}}\,p^r q^{n-r}$$

$$= np \sum_{r=1}^{n} {}_{n-1}C_{r-1} p^{r-1} q^{n-r} = np \sum_{\underline{s}=0}^{n-1} {}_{n-1}C_s p^s q^{n-1-s} \qquad (\because\ r-1 = \underline{s})$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \quad \text{（平均）} \qquad (\because\ p+q=1)$$

　次に、$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ である。先に、$E(X^2)$ を計算する。

$$E(X^2) = \sum_{r=0}^{n} r^2\,{}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \{r(r-1)+r\}\,{}_{n-1}C_{r-1} p^r q^{n-r}$$

$$= \underbrace{\sum_{r=0}^{n} r(r-1)\,{}_nC_r p^r q^{n-r}}_{\text{（第１項）}} + \underbrace{\sum_{r=0}^{n} r\,{}_nC_r p^r q^{n-r}}_{\text{（第２項）}}$$

となる。

この（第２項）は、$E\left(X\right)=np$ に他ならない。

以下、（第１項）を計算する。

$$（第１項）=\sum_{r=0}^{n} r\left(r-1\right){}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=\underline{2}}^{n} r\left(r-1\right){}_nC_r p^r q^{n-r}$$

となる。この変形は $r=0,1$ に関する項は $0$ であることから、$r=0$ を $r=2$ と変形できる。

さて、$2 \le r \le n$ の場合、

$$r\left(r-1\right){}_nC_r = r\left(r-1\right)\frac{n!}{\left(n-r\right)!\cdot r!} = n\left(n-1\right)\frac{\left(n-2\right)!}{\left(n-r\right)!\cdot\left(r-2\right)!} = \underline{n\left(n-1\right){}_{n-2}C_{r-2}}$$

$$（第１項）=\sum_{r=\underline{2}}^{n} r\left(r-1\right){}_nC_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=2}^{n} \underline{n\left(n-1\right){}_{n-2}C_{r-2}}\, p^r q^{n-r}$$

$$= n\left(n-1\right)p^2 \sum_{r=2}^{n} {}_{n-2}C_{r-2}\, p^{r-2} q^{n-r}$$

$$= n\left(n-1\right)p^2 \sum_{s=\underline{0}}^{n-2} {}_{n-2}C_s\, p^s q^{n-r} \qquad \left(\because\ r-2=\underline{s}\right)$$

$$= n\left(n-1\right)p^2\left(p+q\right)^{n-2} = n\left(n-1\right)p^2 \qquad \left(\because\ p+q=1\right)$$

したがって、

$$E\left(X^2\right) = n\left(n-1\right)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\sigma^2 = V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = \left(n^2p^2 - np^2 + np\right) - \left(np\right)^2$$

$$= np\left(1-p\right) = npq$$ （分散）　　［証明終わり］

| | |
|---|---|
| （参考） | 教科書(P. 40 下段)に、別の手法の証明が記載されている。<br>この別の手法も大変興味深い。 |