1.3 確率の意味

1 個のさいころを投げると 1 から 6 までのいずれかの目が出る．どの目が実際に出るかは投げてみないとわからないし，確実に予測することはできない．しかし，さいころが正確に作られており，何の作為もなしに投げるものとすれば，どの目が出ることも同じ程度に確からしいと期待できる．したがって，それぞれの目の出る確からしさを表す数値として $\dfrac{1}{6}$ を考えるのが自然である．また，「奇数の目が出る」という事象 A を根元事象で表せば，

$$A = \{1, 3, 5\}$$

であり，事象 A の起こる確からしさは $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ と考えられる．

一般に，ある試行の標本空間 Ω で事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ で表すことにし，標本空間に対して $N = n(\Omega)$ とする．そのとき

> [1.8] ある試行の標本空間 Ω において $N = n(\Omega)$ であり，各根元事象は同じ程度の確からしさで起こるものとする．そのとき事象 A が起こる確率を
>
> $$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$
>
> で定義する．

p15

このように定義された確率を，あとで述べる統計的確率と区別するため，数学的確率という．標本空間 Ω が N 個の根元事象 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ の集まりであるとき，それらが同じ程度に確からしいというのは，

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_N)$$

であることを表す．したがって，これらの確率はすべて $\dfrac{1}{N}$ である．

例 1.10 例 1.8 の箱の中から 1 個の球を取り出すとき，$N = 7$ であり，事象 $A =$「白球である」について $n(A) = 4$ であるから，その起こる確率は

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{7}$$

である．また，事象 $B =$「数字が偶数である」が起こる確率は

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{3}{7}$$

終

問題 1.11　問題 1.10 の 1 から 10 までの数を記入した札 10 枚から 1 枚を取り出す試行において，次の事象の確率を求めよ．

V

事象 A =「奇数である」　事象 B =「6 の約数である」

和事象 $A \cup B$　積事象 $A \cap B$　余事象 $\overline{A}$

例 1.11　硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 で示すことにする．2 枚の硬貨を投げて，第 1 の硬貨が表，第 2 の硬貨が裏ならば (1, 0) と表すことにする．3 枚以上の場合も同様な表し方をする．

何枚かの硬貨を投げて，そのうち 2 枚表が出る確率を考えよう．

(1)　硬貨を 2 枚投げるときの標本空間は

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$$

これら 4 個の根元事象が起こるのはすべて同じ程度に確からしいと考えられるから，2 枚とも表の出る事象 $\{(1, 1)\}$ の確率は $\dfrac{1}{4}$ である．

(2)　3 枚投げるときの標本空間は

$$\Omega = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$$

で表される．3 枚投げたとき，2 枚が表であるという事象を A とすると

$$A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

であり，事象 A の起こる確率は $\dfrac{3}{8}$ である．これは場合の数の考え方によって，次のように求めることができる．

3 枚の硬貨を投げたとき表と裏の出方は $(*, *, *)$ の一つひとつの $*$ が 1 か 0 の 2 通りであるから，Ω を構成する根元事象の総数 N は

$$N = 2^3 = 8$$

である．これら 8 個の根元事象は同じ程度の確からしさで起こる．そのうち 2 枚が表であるのは $(*, *, *)$ の $*$ の 2 つが 1 の場合である．その総数は 3 個のものから 2 個とる組合せの数であり，

$$n(A) = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$$

である．したがって，

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

(3)　5 枚投げたとき根元事象の総数 N は $N = 2^5 = 32$．このうち 2 枚が表であ

る事象を B とすると，$n(B)$ は 5 個のものから 2 個とる組合せの数

$$n(B) = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

である．したがって，求める確率は

$$P(B) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

終

問題 1.12　6 枚の硬貨を投げて次の枚数だけ表が出る確率を求めよ．

(1)　2 枚　　(2)　3 枚

例題 1.3　箱の中に白球 6 個，赤球 4 個が入っている．次の確率を求めよ．

(1)　同時に 3 個取り出すとき，3 個とも赤球である確率

(2)　同時に 4 個取り出すとき，2 個が白球，2 個が赤球である確率

解　(1)　合計 10 個の球の中から 3 個取り出す組合せの数 N は

$$N = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$$

これらの一つひとつの組合せが根元事象であり，同じ程度の確からしさで起こる．このうち，赤球 4 個から 3 個を取り出す組合せの数 n は

$$n = {}_4\mathrm{C}_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

したがって，求める確率は

$$\frac{n}{N} = \frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

(2)　10 個のうち 4 個取り出す組合せの数 N は

$$N = {}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$$

白球 6 個のうちから 2 個を，また赤球 4 個のうちから 2 個を取り出す組合せの数はそれぞれ ${}_6\mathrm{C}_2$，${}_4\mathrm{C}_2$ である．2 個ずつ取り出す場合の数は

$$n = {}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6 \cdot 5}{2} \times \frac{4 \cdot 3}{2} = 90$$

したがって，その確率は

$$\frac{n}{N} = \frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

終

問題 1.13　箱の中に白球 6 個，赤球 4 個が入っている．次の確率を求めよ．

(1)　同時に 3 個取り出すとき，3 個とも白球である確率

(2)　同時に 5 個取り出すとき，3 個が白球，2 個が赤球である確率

(3)　同時に 5 個取り出すとき，白球が 3 個以上含まれている確率

例 1.12　2個のさいころを投げて，第1と第2のさいころの出た目の数をそれぞれ x，y とし，その対を (x, y) で表すことにする．根元事象は

$$\begin{array}{cccccc}
(1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & (1, 4) & (1, 5) & (1, 6) \\
(2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & (2, 4) & (2, 5) & (2, 6) \\
(3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & (3, 4) & (3, 5) & (3, 6) \\
(4, 1) & (4, 2) & (4, 3) & (4, 4) & (4, 5) & (4, 6) \\
(5, 1) & (5, 2) & (5, 3) & (5, 4) & (5, 5) & (5, 6) \\
(6, 1) & (6, 2) & (6, 3) & (6, 4) & (6, 5) & (6, 6)
\end{array}$$

であり，標本空間 Ω はまとめて

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, \ldots, 6\}$$

と表される．$N = 36$ であり，根元事象は同じ程度の確からしさで起こる．

$A_5 =$「2個のさいころの目の和が5となる」とすると

$$A_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

であり，$n(A_5) = 4$ であるから

$$P(A_5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

終

問題 1.14　2個のさいころを投げるとき，次の事象の確率を求めよ．

(1)　事象 $A_i =$「目の和が i である」$(i = 2, 3, \ldots, 12)$

(2)　事象 $B =$「目の和が5以下である」

(3)　事象 $C =$「同じ目が出る」

数学的確率では，標本空間の根元事象の数が有限個であり，各根元事象が同じ程度の確からしさで起こる場合を考えている．しかし，毎日の降雨の可能性やある工場で作られる全製品に対する不良品の割合などは，これを根元事象に分け，同じ程度の確からしさを期待することはできない．このような場合，次の確率の定義が用いられる．

> [1.9]　試行を N 回くり返したとき，事象 A が起こった回数が n であるとする．試行の回数 N をふやしてゆくとき，$\dfrac{n}{N}$ が一定値 p に近づくならば，この値 p を事象 A の確率という．

試行をくり返して $N \to \infty$ とすると，$\dfrac{n}{N}$ がほとんど確実に一定値 p に近づくことが知られている．このように定義された確率を統計的確率または経験的確率という．$\dfrac{n}{N}$ を相対度数という．実際の問題では，N を十分大きくしたときの相対度数をその事象の確率として用いている．

例 1.13　表 1.1 は 2003 年から 2012 年まで 10 年間の出生について，総数と性別の人数および性別出生比を示す（千未満四捨五入）．この表から，男女の出生比率はほぼ一定であり，生まれる確率は 0.513 と 0.487 と考えられる．

表 1.1

年次	出生数（単位 千人）			出生性比	
	総数	男	女	男	女
2003	1124	577	547	0.513	0.487
2004	1111	570	541	0.513	0.487
2005	1063	545	517	0.513	0.487
2006	1093	560	532	0.513	0.487
2007	1090	560	530	0.514	0.486
2008	1091	560	532	0.513	0.487
2009	1070	549	521	0.513	0.487
2010	1071	551	521	0.514	0.486
2011	1051	538	513	0.512	0.488
2012	1037	532	505	0.513	0.487
計	10800	5541	5259	0.513	0.487

（厚生労働省人口動態統計より）

終

1.4 確率の計算

確率の基本的性質　標本空間 Ω の根元事象はすべて等しい確率をもつ場合を考える．根元事象の個数は空事象 ϕ については $n(\phi)=0$ であり，標本空間 Ω については $n(\Omega)=N$ とする．任意の事象 A に対して

$$0 \leqq n(A) \leqq N$$

である．この不等式の各辺を N で割れば $P(A)=\dfrac{n(A)}{N}$ であるから

$$0 \leqq P(A) \leqq 1$$

が成り立つ．

事象 A と B が互いに排反ならば，$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ であるから

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が成り立つ．以上の性質をまとめると

[1.10]　確率の基本的性質

(1)　任意の事象 A に対して $0 \leqq P(A) \leqq 1$

(2)　$$P(\Omega) = 1,\ P(\phi) = 0$$

(3)　事象 A と B が互いに排反ならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

上の (3) の性質はよく用いられ，確率の加法定理といわれる．これは 3 個以上の事象についても一般化される．A，B，C が互いに排反ならば

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

が成り立つ．また，根元事象が等しい確率をもつ場合を考えてきたが，基本的性質 [1.10] はそうでない場合にも成り立つ．

事象 A とその余事象 $\overline{A}$ に対して $A \cap \overline{A} = \phi$，$A \cup \overline{A} = \Omega$ であるから，

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

すなわち

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

が成り立つ．

図 1.4 のように 2 つの事象が必ずしも排反でないとき，次の式が成り立つ．

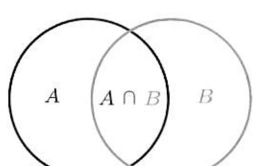

図 1.4

[1.11]　一般の加法定理　任意の事象 A，B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

証明

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$
$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$
$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

[1,10](3)

と表される．$A \cap B$，$A \cap \overline{B}$，$\overline{A} \cap B$ は互いに排反であるから，基本的性質 [~~1.3~~] の加法定理により

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

が成り立ち，定理の式が導かれる．　終

例題 1.4　箱の中に 1 から 6 までの数字がつけられた白球 6 個と，7 から 10 までの数字がつけられた赤球 4 個が入っている．その箱の中から 1 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　数字が奇数の白球である　　(2)　数字が奇数かまたは白球である

解　事象を $A =$「奇数である」，$B =$「白球である」とすると，これらの確率は

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2},\quad P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(1)　数字が奇数の白球である事象は $A \cap B = \{1, 3, 5\}$ であるから，

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

(2)　数字が奇数か白球である事象は $A \cup B$ であるから，その確率は

$$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

事象 $A \cup B$ は，数字が偶数の赤球であるという事象 $\overline{A} \cap \overline{B}$ の余事象であり，$\overline{A} \cap \overline{B} = \{8, 10\}$ であるから，

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad したがって \quad P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

としても導かれる．　終

問題 1.15　トランプのカード 52 枚のうち，エース，キング，クイーン，ジャックを絵札とする．1 枚のカードを引くとき，次の確率を求めよ．

(1)　ハートの絵札である確率
(2)　ハートの札か絵札である確率
(3)　ハートの札でも絵札でもない確率

条件付き確率

例題 1.5 テレビのアンケート番組である問題について男女 98 名に賛成・反対をたずねたところ，表 1.2 の回答を得た．次の問いに答えよ．

(1) 回答者の中から任意に 1 人を選んだとき，男性である確率

(2) 回答者の中から任意に 1 人を選んだとき，男性の賛成者である確率

(3) 男性の中から任意に 1 人を選んだとき，賛成者である確率

表 1.2

	賛成	反対	計
男	31	19	50
女	27	21	48
計	58	40	98

解
$$A = \text{「男性である」},\ B = \text{「賛成である」}$$

とすれば，それぞれの余事象は

$$\overline{A} = \text{「女性である」},\quad \overline{B} = \text{「反対である」}$$

(1)
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{50}{98} = \frac{25}{49}$$

(2)
$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{31}{98}$$

(3)
$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{31}{50}$$

終

ある試行の標本空間を Ω，根元事象の数を N とし，それらは同じ確率をもつものとする．2 つの事象 A，B について，次の事象に分けて考える．

$$A \cap B, \qquad A \cap \overline{B}, \qquad \overline{A} \cap B, \qquad \overline{A} \cap \overline{B}$$

これらの事象は互いに排反である．それぞれに属す根元事象の個数を a，b，c，d とすれば，その個数の間には表 1.3 の関係があり，総数は

$$a + b + c + d = N$$

である．

表 1.3

	B	$\overline{B}$	計
A	a	b	$a+b$
$\overline{A}$	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	N

$a+b \neq 0$ すなわち A は空事象でないとし，A が起こったときに B が起こる確率を $P(B \mid A)$ または $P_A(B)$ で表し，これを A が起こったときの B の条件付き確率という．A の根元事象に対する $A \cap B$ の根元事象の個数を考えて

$$P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{a}{a+b}$$

である．この分母・分子を N で割ると次の式が成り立つ．

[1.12]　事象 A が起こったとき B が起こる条件付き確率は

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

問題 1.16　1 組 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引いたとき，次の確率を求めよ．

(1)　そのカードがハートであるとわかったとき，絵札である確率

(2)　そのカードが絵札であるとわかったとき，ハートである確率

定理 [1.12] の式で分母を払って等式

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

が導かれる．B が空事象でないときは，条件付き確率 $P(A \mid B)$ を考えることもでき，この等式で A と B を入れ換えた式も成り立つ．

[1.13]　**乗法定理**　事象 A と B の条件付き確率について，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

例題 1.6　10 本のくじの中に当たりくじが 3 本入っている．A と B が順に 1 本ずつくじを引くとき，次の確率を求めよ．

(1)　A と B がそれぞれ当たる確率

(2)　2 人ともはずれる確率

解　(1)　$A =$「A が当たる」，$B =$「B が当たる」とする．このとき

$$P(A) = \frac{3}{10},\quad P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$$

である．事象 B は 2 つの事象

$A \cap B =$「A が当たって B も当たる」

$\overline{A} \cap B =$「A がはずれて B が当たる」

に分けられる．それぞれの場合，残り 9 本のうち当たりくじの本数を考えて

$$P(B \mid A) = \frac{2}{9}, \quad P(B \mid \overline{A}) = \frac{3}{9}$$

である．したがって，乗法定理 [1.13] により

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{30}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

事象 $A \cap B$ と $\overline{A} \cap B$ は互いに排反であるから，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{30} + \frac{7}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

である．A と B の当たる確率は同じである．

(2)　$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \dfrac{6}{9}$ であるから，2 人ともはずれる確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

これは 10 本の中から 2 本を引いたとき，ともにはずれくじである確率

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

に等しい．　終

問題 1.17　白球 6 個，赤球 4 個が入っている箱から，1 個ずつ取り出してもとに戻さないものとする．そのとき次の確率を求めよ．

(1)　3 個の球を取り出すとき，白赤白の順で取り出される確率

(2)　3 回目が赤球である確率

1.5　独立事象

もし $P(B) \neq P(B \mid A)$ ならば，事象 A が起こることは事象 B の起こり方に何らかの影響を与えている．このとき事象 B は A に従属するという．

$$P(B) = P(B \mid A)$$

が成り立つとき，事象 B は A に独立であるという．乗法定理 [1.13] にこの式を代入すると，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{1}$$

および

$$P(A)P(B) = P(B)P(A \mid B) \tag{2}$$

が成り立つ．式 (2) で $P(B) \neq 0$ ならば $P(A) = P(A \mid B)$ も成り立ち，A も B に独立である．$P(A) = 0$ または $P(B) = 0$ の場合も含めて，式 (1) が成り立つとき，事象 A と B は互いに独立であるという．

3 つの事象 A，B，C のどの 2 つも互いに独立であり，

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

が成り立つとき，A，B，C は互いに独立であるという．

例 1.14　トランプのカード 52 枚の中から 1 枚を引くとき，

$A =$「ハートである」

$B =$「エース，キング，クイーン，ジャックのいずれかである」

$C =$「エースを含めて 7 以下の数である」

とする．$B \cap C =$「エースである」であり，A と B，B と C を比較するとき，それぞれの事象の起こる枚数は表 1.4 のようになる．

表 1.4

	B	$\overline{B}$	計
A	4	9	13
$\overline{A}$	12	27	39
計	16	36	52

	B	$\overline{B}$	計
C	4	24	28
$\overline{C}$	12	12	24
計	16	36	52

$$P(A)P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{16}{52} = \frac{1}{13} = P(A \cap B)$$

$$P(B)P(C) = \frac{16}{52} \cdot \frac{28}{52} = \frac{28}{169}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{13}$$

であるから，A と B は互いに独立であるが，B と C は従属している．　終

問題 1.18　10 本のくじの中に当たりくじが 3 本入っている．次の方法で A と B が順に 1 本ずつ引くとき，A が当たる事象と B が当たる事象は独立か．

(1)　A が引いたくじをもとに戻さない

(2)　A が引いたくじをもとに戻す

硬貨やさいころを投げるなどの試行をくり返し行う場合，個々の試行の結果がそれ以外の試行に影響を及ぼさないならば，それらを独立試行という．

例 1.15　5個のさいころを投げて，6の目が r 個だけ出る確率を求める．

5個のさいころに番号をつけて，

$$A_i = \text{「}i\text{ 番目のさいころの出た目が 6 である」}$$

とする．おのおののさいころについて

$$P(A_i) = \frac{1}{6}, \quad P(\overline{A_i}) = \frac{5}{6}$$

である．1個のさいころの目の出方は，他のさいころの目の出方に影響を与えないから，これらの事象 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 は互いに独立である．

5個のさいころのうち，たとえば2番目と5番目のさいころの目だけが6であるという事象は $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap A_5$ と表され，その確率は

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

である．同様に考えて，ある特定の2個のさいころの目だけが6である確率は上の値と同じである．

5個のうち2個だけが6の目である場合は，

$$\boxed{}\ \boxed{6}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{6}$$

のように，5個のうちから2個とる組合せの数 ${}_5\mathrm{C}_2$ だけある．したがって，2個が6の目であるような確率は全部で

$${}_5\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

である．5個のうち r 個が6の目である確率を p_r で表すと，同様に考えて

$$p_r = {}_5\mathrm{C}_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{5-r}$$

である．$r = 0, 1, \ldots, 5$ として確率 p_r の値は表1.5のようになる．

表 1.5

r	0	1	2	3	4	5
p_r	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$	$5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$10\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$5\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^5$
	0.4019	0.4019	0.1608	0.0322	0.0032	0.0001

終

例1.15と同じように考えて，一般に次の定理が成り立つ．

[1.14]　**独立試行の確率**　ある試行において，事象 A とその余事象 $\overline{A}$ の確率を

$$P(A) = p, \quad P(\overline{A}) = q, \quad p + q = 1$$

とする．その試行を独立に n 回くり返すとき，A が r 回起こる確率 p_r は

$$p_r = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \quad (0 \leqq r \leqq n)$$

問題 1.19　4 枚の硬貨を投げるとき，次の確率を求めよ．

(1)　表が r 枚だけ出る確率 p_r $(r = 0, 1, 2, 3, 4)$

(2)　表が 3 枚以上出る確率

問題 1.20　不良品が含まれている割合が 10% である製品の山から，任意に 10 個を抜き出すとき，次の確率を求めよ．

(1)　不良品がちょうど 2 個含まれている確率

(2)　不良品が 2 個以下である確率

非常に多数のものの中に特定の性質のものが含まれているとき，その中から数個を抜き出す場合，また長期間の試行で特定の事象が起こる割合を考える場合，各試行は互いに独立であると考えてよい．

練習問題 1

1.　4 けたの整数でおのおのの位の数字が異なるもののうち，次のようなものはいくつあるか．

(1)　奇数の数字と偶数の数字が交互に並ぶ

(2)　5 の倍数

(3)　各位の数字が左から右に順に大きくなっている

2.　さいころを 4 回投げるとき，次のような目の出方は何通りあるか．

(1)　2 種類の目が 2 回ずつ出る

(2)　2 種類の目だけが出る

3.　20 個の製品の中に 2 個の不良品が含まれている．この中から 5 個を取り出すとき，その中に不良品が入っていない確率を求めよ．

4.　図 1.5 のような正五角形 ABCDE の頂点を，A から出発して B, C, ... の順に左まわりに移動する点 P がある．さいころを投げて出た目の数だけ P を移動することにし，k 回目に進んだ点の位置を P_k とする．たとえば 1 回目に 3，2 回目に 2，3 回目に 1 が出たときは，$\mathrm{P}_1 = \mathrm{D}$，$\mathrm{P}_2 = \mathrm{A}$，$\mathrm{P}_3 = \mathrm{B}$ である．そのとき，次の確率を求めよ．

(1) $P_1 = A$ となる確率
(2) P_1 と P_2 が隣り合う確率
(3) $P_2 = A$ となる確率
(4) P_1 または P_2 が A となる確率
(5) $P_3 = A$ となる確率

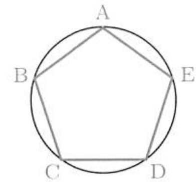

図 1.5

5. 白球 6 個，赤球 4 個，黒球 2 個が入っている箱から，同時に 4 個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．
(1) 4 個とも白球である確率
(2) 白球が 2 個で赤球と黒球が 1 個ずつである確率
(3) 白球 2 個，赤球 2 個である確率
(4) 赤球が 2 個以上含まれている確率

6. 白球と赤球が 5 個ずつ計 10 個が入った箱がある．いま任意に 1 個を取り出して，白球ならば箱に戻さず，赤球ならば箱に戻してよくかきまぜて，次の 1 個を取り出す．この操作をくり返すとき，次の確率を求めよ．
(1) 2 回目が白球である確率
(2) 2 回目が赤球である確率
(3) 2 回目と 3 回目がともに白球である確率

7. あるクラスの男子と女子の比率は 3 : 2 であり，アルバイトの経験者は男子のうち $\dfrac{2}{5}$，女子のうち $\dfrac{1}{4}$ であるという．次の確率を求めよ．
(1) 任意に 1 人を選んだとき，男子のアルバイト経験者である確率
(2) アルバイト経験者を任意に選んだとき，女子である確率

8. 2 個の不良品を含んだ製品 10 個がある．いま 1 個ずつ取り出して検査を行い，2 個の不良品を見つけたとき，この検査は終わるものとする．次の確率を求めよ．
(1) 2 回目で検査が終わる確率
(2) 4 回目で検査が終わる確率
(3) 4 回目までに検査が終わる確率

9. ゲームを 1 回行うとき，A と B の勝つ確率は 0.6 と 0.4 である．引き分けはないものとして，先に 4 勝した方を優勝者とする．次の確率を求めよ．
(1) A B A A B A の順で勝つ確率
(2) ちょうど 5 回で優勝者が決まる確率
(3) A が優勝する確率

10. ある工場で 2 種類の機械 A，B を使って同じ製品を作っている．A と B の生産の割合は 70% と 30% であり，不良品の出る率はそれぞれ 2%，3% である．いま，1 つの製品が不良品であったとき，それが A で作られたものである確率を求めよ．