第1章 確 率

近世の初期，南ヨーロッパの諸都市でカードやその他のゲームによる賭けごとが流行していた．その勝つ割合の計算をミラノのカルダノが行っている．彼は 3 次方程式の解法に名を残しているが，職業的賭博師でもあった．17 世紀の中頃，フランスの数学者パスカルとフェルマーの間で交換され確率を論じた書簡が，確率論の始まりとされている．

一定の条件のもとにある事象がくり返し起こり，偶然に左右されるとき，その起こる場合の数を求めるために，順列や組合せなどの考え方が必要である．§1 で確率の基本法則として，事象の間の確率の関係，加法定理とその一般化，複数の事象の独立性・従属性を述べる．

統計の章で後述するが，社会活動が発展し多くの統計資料が集まり，それらを一覧するため度数の分布表や分布図が用いられ，解析するための手法が考えられた．それと同様に，確率についても，標本の出現確率を全体的に見通すために確率分布表や分布図が考えられる．その形にはいろいろなものがあるが，§2 では代表的な一様分布，二項分布について述べる．これらの分布は現代の推測統計学の検定や推計の基礎になっている．

§1. 確 率

1.1 場合の数

あることがらについて，起こりうるすべての場合の個数を場合の数という．

例 1.1 等式 $2x+y+z=7$ が成り立つような自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ は何通りあるか数えよう．

$x \geqq 3$ とすると，$y \geqq 1$，$z \geqq 1$ であるから，$2x+y+z \geqq 8$ となる．したがって，$x=1$ または $x=2$ である．それぞれの場合に y と z の値を図 1.1 のように順序よく書く．

自然数の組は $x=1$ の場合には 4 通り，$x=2$ の場合には 2 通りである．これら

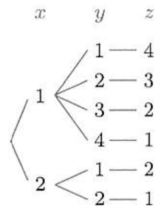

図 1.1

の場合は同時に起こることはないから，求める自然数の組は

$$4+2=6 \text{ 通り}$$

終

このような図を樹形図という．取り扱う個数が少ないときは，樹形図を実際に書いて数えることができる．

問題 1.1　和が 10 になるような 3 個の自然数の組は全部でいくつあるか．1 つの組の中で順序は考えないが，同じ数があってもよい．

順　列

例 1.2　5 枚のカードに数字 1，2，3，4，5 が 1 つずつ記入されている．その中から 3 枚のカードを並べて 3 けたの整数を作るとき，何通りの整数ができるかを考えよう．

1 番目の百の位の数は 5 枚の中からどれを選んでもよいから，その選び方は 5 通りである．1 つの選び方に対して，2 番目の十の位の数は残りの 4 個の数字のうちどれを選んでもよいから，4 通りずつある．したがって，2 番目までの数の並べ方は

$$5 \times 4 = 20 \text{ 通り}$$

である．

さらに 3 番目の一の位の数は，残りの 3 個の数字のうちどれを選んでもよいから，その並べ方は 3 通りである．したがって，3 番目までの並べ方は全部で

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ 通り}$$

終

一般に，異なる n 個のものから，異なる r 個を取り出して 1 列に並べたものを，n 個のものから r 個とる順列といい，その総数を記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す．この場合，1 つの順列を作るのに，各段階での選び方は

$$\begin{array}{ccccc} 1\text{番目} & 2\text{番目} & 3\text{番目} & \cdots & r\text{番目} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow \\ n\text{通り} & (n-1)\text{通り} & (n-2)\text{通り} & \cdots & (n-r+1)\text{通り} \end{array}$$

であるから，${}_n\mathrm{P}_r$ は次の式で与えられる．

> [1.1]　異なる n 個のものから r 個とる順列の総数は
>
> $${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の積}}$$

問題 1.2　次の値を求めよ．

(1)　${}_7\mathrm{P}_3$　　(2)　${}_8\mathrm{P}_2$　　(3)　${}_4\mathrm{P}_4$

1 から n までの自然数の積を n の階乗といい，$n!$ で表す．すなわち，

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n$$

異なる n 個のもの全部を 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

と表される．階乗を用いると，$r < n$ のとき，

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

と書ける．$r = n$ とすると右辺の分母は $0!$ となる．そこで，

$$0! = 1$$

と定義する．そうすれば，上の式は $r = n$ のときも成り立つ．

例題 1.1　6 個の数字 0，1，2，3，4，5 の中から異なる 4 個を並べて 4 けたの整数を作るとき

(1)　全部で何個あるか　　(2)　偶数は何個あるか

解　(1)　千の位の数は 0 以外の 5 個の数から 1 つ選べばよい．百の位以下の 3 けたの数は 0 を含めた残り 5 個の数から 3 個を並べる順列の数だけあるから，全部で

$$5 \times {}_5\mathrm{P}_3 = 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300 \text{ 通り}$$

(2)　一の位の数が 0 であるとき，十の位以上の 3 けたの数の並べ方は 5 個の数字から 3 個をとる順列の数であり，${}_5\mathrm{P}_3$ 通りである．一の位の数が 2 または 4 であるとき，千の位の数のとり方は一の位で使った数と 0 以外の 4 個の数の 1 つである．そのとき，百の位と十の位の数は残り 4 個のうちから 2 個を選ぶから，その順列の数は ${}_4\mathrm{P}_2$ であり，この場

合の整数の個数は

$$2 \times 4 \times {}_4\mathrm{P}_2 \text{ 通り}$$

である．求める順列の数は2つの場合をあわせて全部で

$$ {}_5\mathrm{P}_3 + 2 \times 4 \times {}_4\mathrm{P}_2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 156 \text{ 通り}$$

終

問題 1.3　男子4人，女子3人がいる．次のような並び方は何通りあるか．

(1)　男女の区別なく1列に並ぶ

(2)　男子と女子が交互に並ぶ

例 1.3　4種類の数字1，2，3，4を用いて3けたの整数を作る場合，同じ数字を何回用いてもよいものとする．百，十，一の各位の数字の選び方は，他の位の数字の選び方に関係なく，それぞれ4通りである．その総数は

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64 \text{ 通り}$$

終

異なる n 個のものから同じものをくり返しとることを許して r 個とる順列を**重複順列**という．その総数は

$$n^r$$

である．

問題 1.4　4個の数字0，1，2，3を用いてできる5けたの整数は何個あるか．

組合せ

例 1.4　例1.2の5枚のカードから3枚を取り出すとき，順序を考えないで異なる数の組は何通りできるか考えよう．たとえば順列

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321$$

は順序を考えなければ同じ数の組 $\{1, 2, 3\}$ になる．

5枚のカードの中から3枚取り出す順列は総数が ${}_5\mathrm{P}_3$ であるが，そのうち同じ3種類の数からできる順列は ${}_3\mathrm{P}_3 = 3!$ 個ずつある．したがって，異なる数字の組は全部で

$$\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_3\mathrm{P}_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ 通り}$$

終

一般に，異なる n 個のものから r 個を取り出し，順序を考えないで一組としたものを，**n 個のものから r 個とる組合せ**といい，その総数を記号 ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す．上の例では

${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通りである．

n 個のものから r 個とる順列と組合せを比較すると，順列の総数は ${}_n\mathrm{P}_r$ である．そのうち同じ r 個のものからできる順列は $r!$ 個あり，それらの順列で順序を考慮しなければ 1 つの同じ組合せになる．したがって，組合せの総数は次の式で与えられる．

[1.2]　異なる n 個のものから r 個とる組合せの総数は

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdot 1} $$

問題 1.5　次の値を求めよ．n は自然数とする．

(1)　${}_5\mathrm{C}_2$　　(2)　${}_7\mathrm{C}_3$　　(3)　${}_7\mathrm{C}_4$

(4)　${}_n\mathrm{C}_1$　　(5)　${}_n\mathrm{C}_{n-1}$　　(6)　${}_n\mathrm{C}_n$

公式 [1.2] の分子・分母に $(n-r)! = (n-r)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$ を掛ければ，分子は $n!$ となり，次の式が成り立つ．

[1.3]

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

$r = 0$ のときにもこの式が成り立つように ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定義する．

問題 1.6　男子 6 人，女子 4 人から次のような代表の選び方は何通りあるか．

(1)　男女の区別なく 4 人を選ぶ

(2)　男子 3 人，女子 2 人の代表を選ぶ

問題 1.7　1 枚の硬貨を 8 回投げるとき，表が 3 回出る場合は何通りあるか．

次の公式が成り立つ．

[1.4]

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

証明

公式 [1.3] で r の代わりに $n-r$ とすると

$$ {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_n\mathrm{C}_r $$

終

この公式は，n 個のものから r 個を選ぶ代わりに，その他の $n-r$ 個を取り除くと考えれば同じ組合せが得られるから，その総数は同じになることを示している．

[1.5]　$${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r \quad (1 \leqq r \leqq n-1)$$

証明

右辺に公式 [1.3] を適用する．

$$\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times r}{r!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)! \times (n-r)}{r!\,(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times n}{r!\,(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}$$

終

この公式は次のことを表している．n 個のものから r 個を選ぶとき，特定のものを a とし，a を含む組合せと含まない組合せに分ける．前者は a 以外の $n-1$ 個のものから $r-1$ 個を選べばよく，後者は a 以外の $n-1$ 個から r を選ぶ組合せである．それらの総数は ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ と ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ であり，あわせて ${}_n\mathrm{C}_r$ に等しい．

例題 1.2　7 個の文字 a，a，a，b，b，c，c 全部を 1 列に並べる並べ方は何通りあるか．

解　7 個の文字を並べるとき，たとえば

a			a		a	

のように，3 個の a を 7 個の枠に入れると考える．

まず，a を入れる 3 個の枠の選び方は ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りある．次に，残りの 4 個の枠から b を入れる 2 個の枠の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある．残りの 2 個の枠に c を入れるので，${}_2\mathrm{C}_2 = 1$ 通りに決まる．したがって，求める並べ方の総数は

$${}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = \frac{7!}{3!\,4!} \times \frac{4!}{2!\,2!} \times 1 = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210 \text{ 通り}$$

終

同じ考え方によって次の式が成り立つ．

[1.6]　n 個のもののうち a が p 個，b が q 個，c が r 個，$\ldots$ $(p+q+r+\cdots=n)$ あるとき，それらをすべて並べてできる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$$

問題 1.8　8 個の数字 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4 を全部使ってできる 8 けたの整数は何個あるか.

二項定理　展開公式によって

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

が成り立つ. 一般に, n 個の $a+b$ の積

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

を展開した式は, n 個の因数 $a+b$ から a と b のどちらかをとって掛け合わせた積の和である. n 個の $a+b$ のうち, r 個からは a をとり, 残りの $n-r$ 個からは b をとった積は $a^r b^{n-r}$ になる. このような積が得られる選び方の数は, n 個から r 個をとる組合せの数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に等しい. したがって, $(a+b)^n$ の展開式で $a^r b^{n-r}$ の係数は ${}_n\mathrm{C}_r$ である. ${}_n\mathrm{C}_r$ を ${}_n\mathrm{C}_{n-r}$ でおきかえて, 次の定理が成り立つ.

[1.7]　二項定理

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

${}_n\mathrm{C}_r$ を式 [1.2] を用いて表すと, 二項定理は次の式になる.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}a^{n-r}b^r + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ として, この式の係数を順に並べて書くと次のようになる.

	$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

これをパスカルの三角形という．公式 [1.4] により左右対称になる．また，各段の隣り合う 2 数の和が次の段の数になり，これは公式 [1.5] に基づいている．

例 1.5

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
(x-3)^4 &= x^4+4x^3\times(-3)+6x^2\times(-3)^2+4x\times(-3)^3+1\times(-3)^4 \\
&= x^4-12x^3+54x^2-108x+81
\end{aligned}
$$

終

問題 1.9　二項定理を用いて次の式を展開せよ．

(1)　$(x+y)^6$　　(2)　$(x-2y)^5$

1.2 試行と事象

ここでは，1 枚の硬貨を投げて表が出るか裏が出るか，1 個のさいころを投げて 6 の目が出るか，偶数の目が出るかなどの確からしさを問題にする．このように，ある定まった条件のもとで実験や観測を行うことを試行という．その結果起こることがらを事象という．事象を A, B, C などの文字で表す．試行によって起こる可能性のある事象の全体を標本空間または全事象といい，Ω で表す．

例 1.6　1 枚の硬貨を投げて表が出るか裏が出るかの試行で，標本空間 Ω は集合

$$\Omega = \{\text{表},\ \text{裏}\}$$

で表される．

終

例 1.7　1 個のさいころを投げて出る目を対象にするとき，標本空間は集合

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

で表される．また，「3 の目が出る」という事象を A，「偶数の目が出る」という事象を B とすると，これらは次の部分集合で表される．

$$A = \{3\},\quad B = \{2,\ 4,\ 6\}$$

終

事象 A のように，ただ 1 つの要素からなる部分集合で表される事象を根元事象という．例 1.6 の根元事象は

$$\{\text{表}\},\ \{\text{裏}\}$$

の 2 個であり，例 1.7 の根元事象は

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

の 6 個である．

例 1.8 箱の中に 1，2，3，4 の数字のついた 4 個の白球と 5，6，7 の数字のついた 3 個の赤球が入っている．この中から 1 個の球を取り出す試行で，標本空間 Ω は集合

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

で表され，図 1.2 で示される．また，「白球である」という事象を A，「数字が偶数である」という事象を B とすると，それらは部分集合

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$$

で表される．

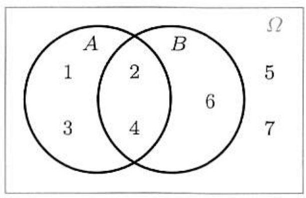

図 1.2

そのとき，「白球であるかまたは数字が偶数である」という事象は A と B の和集合

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

で表される．また，「白球でありかつ数字が偶数である」という事象は A と B の共通部分

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

で表される．「白球でない」という事象は A の補集合

$$\overline{A} = \{5, 6, 7\}$$

で表される．　終

一般に，2 つの事象 A，B について，A または B の少なくとも一方が起こるという事象を A と B の和事象といい，集合と同じ記号を用いて，$A \cup B$ で表す．A と B が同時に起こるという事象を A と B の積事象といい，$A \cap B$ で表す．

例 1.7 の 1 個のさいころを投げる試行で，事象 $A =$「3 の目が出る」と事象 $B =$「偶数の目が出る」が同時に起こることはない．このように何も起こらないということ

も事象と考えて空事象といい，記号 ϕ で表す．この場合 $A \cap B = \phi$ である．

標本空間 Ω の中で事象 A が起こらないという事象を A の余事象といい，$\overline{A}$ で表す．事象 A と余事象 $\overline{A}$ の間には，

$$A \cap \overline{A} = \phi, \quad A \cup \overline{A} = \Omega$$

の関係がある．これらの事象の関係は図 1.3 のように集合の図式で示される．

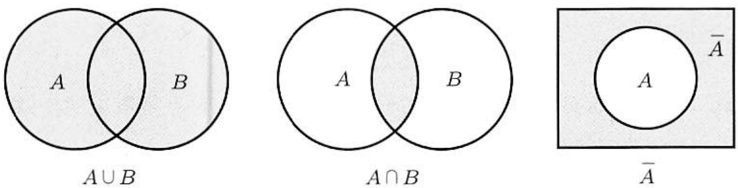

図 1.3

問題 1.10　1 から 10 までの数を記入した札 10 枚から 1 枚を取り出す試行において，次の事象を示せ．

(1)　標本空間 Ω

(2)　$A =$「取り出した札の数が奇数である」

(3)　$B =$「取り出した札の数が 6 の約数である」

(4)　「取り出した札の数が奇数であるかまたは 6 の約数である」

(5)　「取り出した札の数が奇数でありかつ 6 の約数である」

3 個以上の事象についても和事象・積事象やそれらを組み合せた事象が考えられる．

いくつかの事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ があって，そのうち 1 つの事象が起これば他の事象は決して起こらないとき，事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ は互いに排反であるまたは排反事象という．

$$2\text{ つの事象 } A \text{ と } B \text{ が互いに排反である} \iff A \cap B = \phi$$

根元事象は互いに排反である．事象 A とその余事象 $\overline{A}$ は互いに排反である．

例 1.9　例 1.8 の標本空間 Ω で

$$C_1 = \{1, 4, 7\}, \quad C_2 = \{2, 5\}, \quad C_3 = \{3, 6\}$$

とすると，事象 C_1，C_2，C_3 は互いに排反である．　終