【解答例 by 堀部】

［1］$x+\dfrac{1}{x}=a$ のとき，次の式の値を a で表せ。

$$x^3+\frac{1}{x^3}$$

(解)

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=a^3-3a$$

(解2)

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=a^2-2$$

また

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right\}$$

$$=a(a^2-3)$$

$$=a^3-3a$$

［2］正の整数 n に対して，次の式の値を $(n-1)n(n+1)$ は，どんな整数になるか、理由も付けて答えよ。

(解) $n-1$, n, $n+1$ は連続する3つの整数である。
したがって この3つの整数の中には少なくとも1つ偶数があり，かつ，少なくとも1つ3の倍数があるので，その積 $(n-1)n(n+1)$ は 6の倍数である。

［3］ $x^2+x+1=a(x-2)^2+b(x-2)+c$ が恒等式となるように係数 a,b,c の値を定めよ。

(解) 右辺を展開し整理する。

$$(\text{右})=a(x-2)^2+b(x-2)+c$$
$$=a(x^2-4x+4)+b(x-2)+c$$
$$=ax^2+(-4a+b)x+(4a-2b+c)$$

恒等式であるので左辺と係数比較し

$a=1$, $-4a+b=1$, $4a-2b+c=1$

この連立方程式を解いて

$a=1$, $b=5$, $c=7$

(解2) 与等式に $x=2,1,0$ を代入して

$$\begin{cases} 7=c \\ 3=a-b+c \\ 1=4a-2b+c \end{cases}$$

連立させて解くと

$a=1$, $b=5$, $c=7$

逆に、このとき、与等式は恒等式となるので

$a=1$, $b=5$, $c=7$ を得る。

［4］ 3桁の自然数のうちで，6でも8でも割り切れない数はいくつあるか。

(解) $U=\{100,101,102,\cdots,999\}$ (3桁の自然数)

$A=\{102,108,\cdots,996\}$ (6の倍数)

$B=\{104,112,\cdots,992\}$ (8の倍数)

$L.C.M(6,8)=24$ (6と8の最小公倍数)

なので

$C=\{120,144,\cdots,984\}=A\cap B$ (24の倍数)

とおくと, $n(U)=900$, $n(A)=150$

$n(B)=112$, $n(C)=37$

さて、6でも8でも割り切れない数は $n(\overline{A\cup B})$ なので

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(A)-n(B)+n(C)$

$=900-150-112+37$

$=675$

計算メモ

$102=6\times17$, $996=6\times166$

$104=8\times13$, $992=8\times124$

$120=24\times5$, $984=24\times41$

［5］ $a^3+b^3-8+6ab$ を因数分解せよ。　　（ヒント） $-8=(-2)^3$, $6ab=(-3)\times a\times b\times(-2)$

（解）　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)^3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ なので

$$a^3+b^3-8+6ab=a^3+b^3+(-2)^3-3\cdot a\cdot(-2)$$

$$=\{a+b+(-2)\}\{a^2+b^2+(-2)^2-ab-b(-2)-(-2)a\}$$

$$=(a+b-2)(a^2+b^2-ab+2a+2b+4)$$

［6］ $\dfrac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$ を計算せよ。

（解）

$$(\text{与式})=\frac{a+2}{a-\dfrac{2}{a+1}}$$

$$=\frac{(a+2)(a+1)}{a(a+1)-2}$$

$$=\frac{(a+1)(a+2)}{a^2+a-2}$$

$$=\frac{(a+1)\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a+2)}(a-1)}$$

$$=\frac{a+1}{a-1}$$

［7］ $x+\dfrac{1}{x}=a$ のとき，次の式の値を a で表せ。

$$x^3+\frac{1}{x^3}$$

※［1］と同じでした。（ミス）

［8］ $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，x^3+y^3 の値を求めよ。

(解)

$$x+y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

$$=3-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}+2$$

$$=10$$

$$xy=1$$

となる。

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=10^3-3\cdot1\cdot10$$

$$=1000-30$$

$$=970$$

［9］多項式 $f(x)$ を $3x-4$ で割ると 9 余るとき，$x^2f(x)$ を $3x-4$ で割った余りを求めよ。

（解）$f(x)$を$3x-4$で割ったときの商を$Q(x)$とすると

$f(x)=(3x-4)Q(x)+9$

となる。

よって

$x^2f(x)=x^2(3x-4)Q(x)+9x^2$

この等式に $x=\frac{4}{3}$を代入する

$\left(\frac{4}{3}\right)^2f\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(3\cdot\frac{4}{3}-4\right)Q\left(\frac{4}{3}\right)+9\left(\frac{4}{3}\right)^2$

$=16$

よって求める余りは16である。

［10］$(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ を因数分解せよ。

（解）

$$(与式)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$$

$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bca+bc(b+c)$$

$$=(b+c)a\{a+(b+c)\}+bc\{a+(b+c)\}$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

［１１］$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ を因数分解せよ。

(解)

$$(与) = \cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3}+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc\cancel{-a^3}\cancel{-b^3}\cancel{-c^3}$$

$$=3\{(a+b)c^2+(a^2+b^2+2ab)c+(a+b)ab\}$$

$$=3\{(a+b)c^2+(a+b)^2c+(a+b)ab\}$$

$$=3(a+b)\{c^2+(a+b)c+ab\}$$

$$=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

［１２］周囲が５０mで，面積が１５０m^2である，長方形の２辺の長さを求めよ。

(解)

長方形の2辺をxm, ymとする。

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{50}{2} \\ xy=150 \end{cases}$$

よって

$$x(25-x)=150$$

$$x^2-25x+150=0$$

$$(x-10)(x-15)=0$$

$$x=10,15$$

したがって

$$(x, y)=(10, 15), (15, 10)$$

故に

2辺の長さは 10mと15m

［１３］多項式$3x^3-8x^2+1$ を因数分解せよ。

(解) $f(x)=3x^3-8x^2+1$ とおく

$f(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{9}-\frac{8}{9}+1=0$

であるから $f(x)$ は $3x+1$ を因数に持つ

$$
\begin{array}{r r}
 & x^2-3x+1 \\
3x+1 & \overline{)\,3x^3-8x^2\quad+1} \\
 & 3x^3+x^2 \\ \hline
 & -9x^2 \\
 & -9x^2-3x \\ \hline
 & 3x+1 \\
 & 3x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

2次方程式 $x^2-3x+1=0$ の解は $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ で有理数ではないので

$f(x)=(3x+1)(x^2-3x+1)$

［１４］$f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(0)=1$ であり，$x=1$ において最小値をとるという。このとき，係数a，bを求めよ。

(解)

$f(0)=1$ であるから $b=1$

よって

$f(x)=x^2+ax+1$

$f'(x)=2x+a$

$x=1$において最小値をとるから

$f'(1)=0=2+a$

$a=-2$

$f(x)=x^2-2x+1$ とすると.

$f(x)=(x-1)^2$

$x=1$のとき最小値をとる.

又 $f(0)=1$ は明らかである。

［１５］ $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x}=2$ を解け。　　注意：実数で考える。

（解）

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x}=2$$

$$\sqrt{5x+1}=\sqrt{x}+2$$

両辺平方し

$$5x+1=x+4\sqrt{x}+4$$

$$4x-3=4\sqrt{x}$$

さらに平方し

$$(4x-3)^2=16x$$

$$16x^2-24x+9=16x$$

$$16x^2-40x+9=0$$

$$(4x-1)(4x-9)=0$$

$$x=\frac{1}{4},\ \frac{9}{4}$$

(ア) $x=\frac{1}{4}$ のとき

$$(左)=\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\neq 2$$

(イ) $x=\frac{9}{4}$ のとき

$$(左)=\sqrt{\frac{45}{4}+1}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

まとめて

$$x=\frac{9}{4}$$

［１６］ 不等式 $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ を示せ。ただし，a, b, c はすべて正である。

（証明）

$a>0, b>0, c>0$ であるから

$$a+b\geqq 2\sqrt{ab} \quad \text{——①}$$

$$b+c\geqq 2\sqrt{bc} \quad \text{——②}$$

$$c+a\geqq 2\sqrt{ca} \quad \text{——③}$$

したがって

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$$

$$=8abc \quad \text{—④}$$

ところで ①,②,③の等号成立条件はそれぞれ

$a=b$, $b=c$, $c=a$

であるので，④の等号成立条件は

$a=b=c$

である。

［１７］次の等式を証明せよ。

$$\left(\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=1+\left(\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)^2$$

(証明) $\sin\theta = s,\ \cos\theta = c$ とおく

$$(\text{左}) = \left(s-\frac{1}{s}\right)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2$$

$$= s^2-2+\frac{1}{s^2}+c^2-2+\frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{s^2+c^2}{s^2c^2}+s^2+c^2-4$$

$$= \frac{1}{s^2c^2}-3$$

$$(\text{右}) = 1+\left(\frac{s}{c}-\frac{c}{s}\right)^2$$

$$= 1+\frac{(s^2-c^2)^2}{s^2c^2}$$

$$= \frac{s^2c^2+(s^2+c^2)^2-4s^2c^2}{s^2c^2}$$

$$= \frac{1}{s^2c^2}-3$$

故に成り立つ.

［１８］$\log_2 16-\log_3 9$ の値を求めよ。

(解)

$$(\text{与式}) = \log_2 2^4-\log_3 3^2$$

$$= 4\cdot\log_2 2-2\cdot\log_3 3$$

$$= 4-2$$

$$= 2$$

［１９］３個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が６となる確率~~は~~を求めよ。

(解) 3つの目を (x, y, z) と表す。

目の和が6となる場合を書き出す。

$(x, y, z) = (1, 1, 4)$
$(1, 2, 3)$
$(1, 3, 2)$
$(1, 4, 1)$
$(2, 1, 3)$
$(2, 2, 2)$
$(2, 3, 1)$
$(3, 1, 2)$
$(3, 2, 1)$
$(4, 1, 1)$

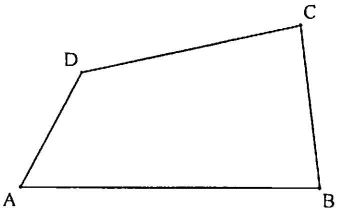
以上のように10通りある。

すべての場合は $6^3 = 216$ 通り

これらはすべて同様に確からしいので、求める確率Pは、

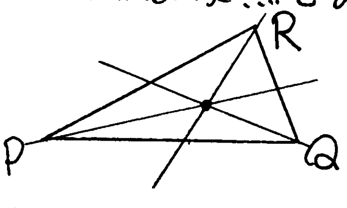
$$P = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

［２０］右図のような一般の四角形ＡＢＣＤの重心を求めたい。
その作図方法を，簡素に説明せよ。



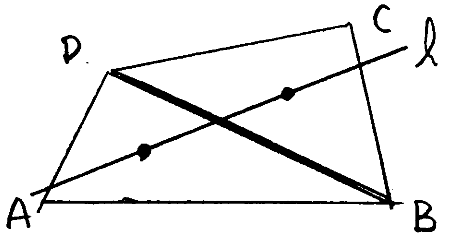
(説明)

三角形PQRの重心は
3つの中線の交点である

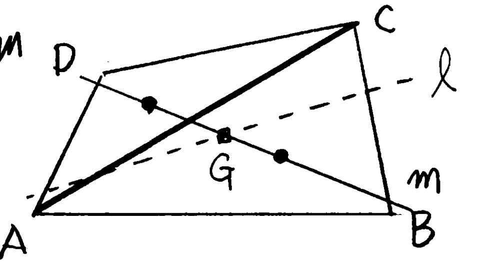


参考

△ABDと△BCDの
重心を結ぶ直線 l
を考える。



△ABCと△ACDの
重心を結ぶ直線 m
を考える。



この2直線 l と m
の交点Gが四角形
のABCDの重心である。

［２１］３数a, b, cが，この順で等差数列をなしているとき，次の３数も次の順で等差数列をなしていることを証明せよ。

$$a^2(b+c),\quad b^2(c+a),\quad c^2(a+b)$$

(証明)

(仮定) $a+c=2b$ ―――①

(結論)

$a^2(b+c)+c^2(a+b)=2b^2(c+a)$ ―②

を示せばよい。

(②の左辺) $=a^2b+a^2c+c^2a+c^2b$

$=ac(a+c)+(a^2+c^2)b$

$=2acb+(a^2+c^2)b$

$=b\{2ac+a^2+c^2\}$

$=b(a+c)^2$

$=b(2b)^2$

$=4b^3$

(②の右辺) $=2b^2(c+a)$

$=4b^3$

よって ①ならば②である。

(証明終わり)

［２２］△ABCにおいて，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$$

(注：∠Aの大きさをA，対辺をa等と表している)

(証明)

△ABCにおいて余弦定理を用いる

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

(左辺) $=ab\cos C-ac\cos B$

$=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)-\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)$

$=\frac{1}{2}(\cancel{a^2}+b^2-c^2-c^2-\cancel{a^2}+b^2)$

$=\frac{1}{2}(2b^2-2c^2)$

$=b^2-c^2$

$=$ (右辺)

(証明終わり)

［２３］ $\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ を a で表せ。

(解)

$\sin\theta+\cos\theta=a$ より

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=a^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=a^2$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(a^2-1)$

さて

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=a^3-3\cdot\frac{1}{2}(a^2-1)\cdot a$$
$$=a^3-\frac{3}{2}a^3+\frac{3}{2}a$$
$$=-\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{2}a$$

［２４］ 数列1, 2, 3, 4, •••, n において，互いに異なる２項の積の和を求めよ。

(解)

S_n

$x \backslash y$	1	2	3	$\cdots$	n
1	$1\cdot1$	$1\cdot2$	$1\cdot3$	$\cdots$	$1\cdot n$
2	$2\cdot1$	$2\cdot2$	$2\cdot3$	$\cdots$	$2\cdot n$
3	$3\cdot1$	$3\cdot2$	$3\cdot3$	$\cdots$	$3\cdot n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$n\cdot1$	$n\cdot2$	$n\cdot3$	$\cdots$	$n\cdot n$

T_n

求める和を S_n とする

$T_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

とおる。

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{(1+2+3+\cdots+n)^2-T_n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right)$$
$$=\frac{1}{24}\left\{3n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)}{24}\left\{3n(n+1)-2(2n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$